История о том, как двое недавних студентов
занялись теоретической математикой
и обрели совершенное счастье

Математическая новелла Д. Э. Кнута

СЮРРЕАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

ЭЛЕКТРОННОЕ ИЗДАНИЕ

Перевод с английского
Н. А. Шиховой

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2014

УДК 51
ББК 22.12
К53

Деривативное электронное издание на основе печатного издания: Сюрреальные числа / Д. Кнут ; пер. с англ. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 112 с. : ил.

Обложка и иллюстрации: Джилл Кнут

Кнут Д.

К53 Сюрреальные числа [Электронный ресурс] / Д. Кнут ; пер. с англ. — Эл. изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 110 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-2341-8

Захватывающая приключенческо-математическая история от известного и блестящего автора Дональда Кнута. Двое героев случайно находят камень с древними письменами и открывают для себя новые математические структуры.

Для студентов, преподавателей и всех любителей математики.

УДК 51
ББК 22.12

18+

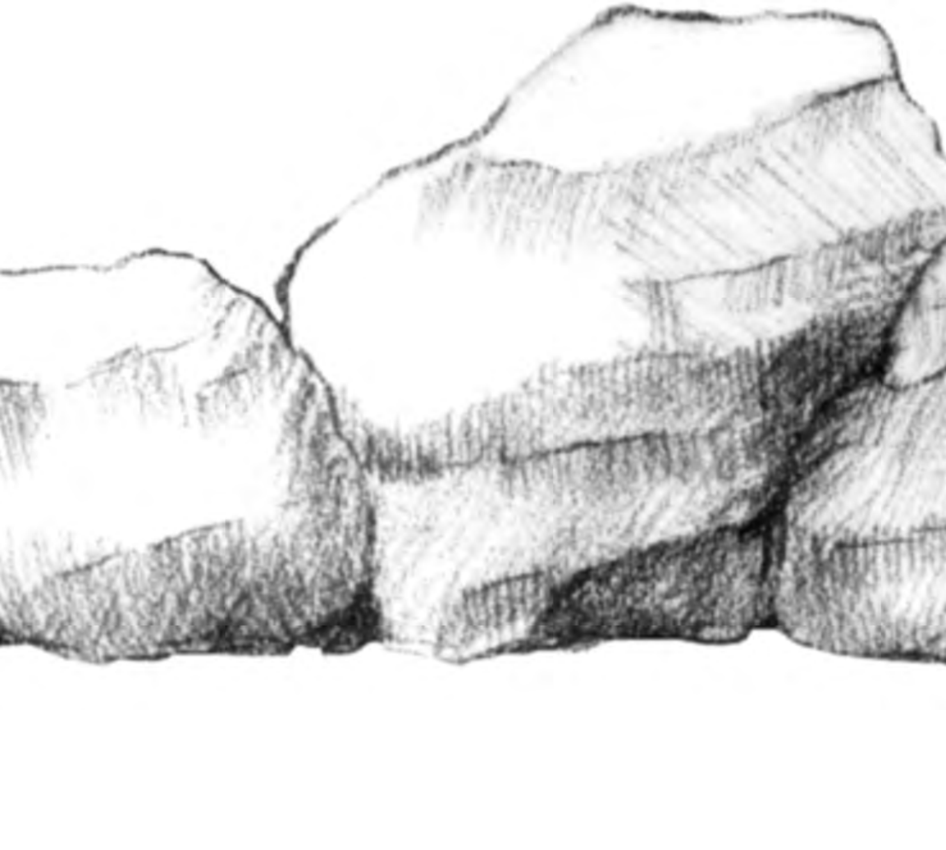
По вопросам приобретения обращаться
«БИНОМ. Лаборатория знаний»
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

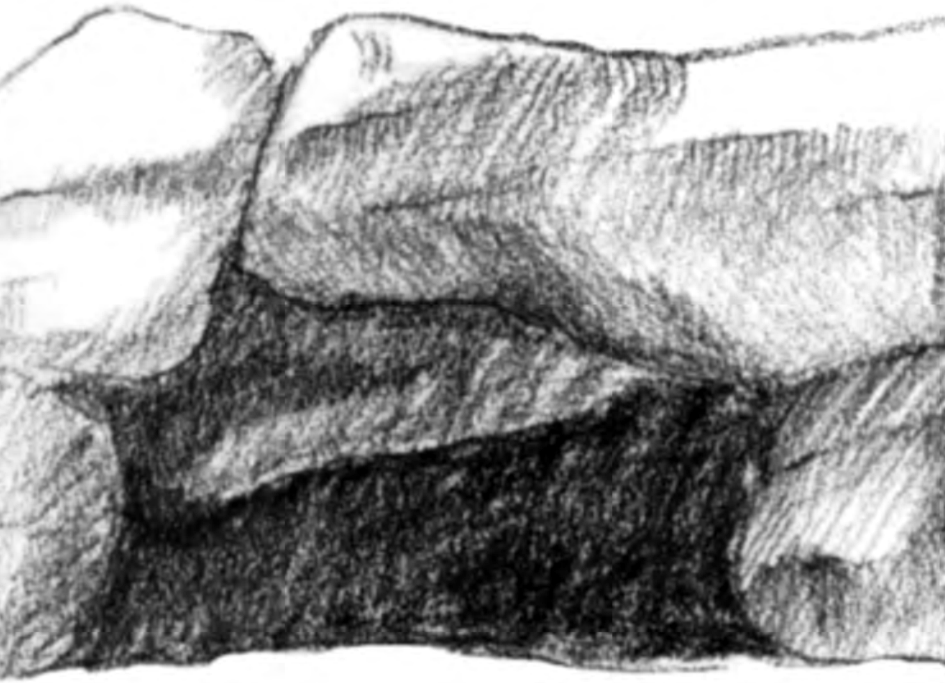
ISBN 978-5-9963-2341-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1

КАМЕНЬ





А. Билл, как тебе кажется, ты нашел себя?

Б. Что?

А. Я вот что имею в виду. Здесь мы на берегу Индийского океана, вдали от цивилизации. Уже прошло несколько месяцев как мы сбежали от всех, чтобы нас не сравняла под одну гребенку «система» и чтобы «найти себя». Вот я и спрашиваю — как тебе кажется, удалось нам это?

Б. Знаешь, Алиса, я тоже об этом размышлял. Эти месяцы, что мы провели вместе, были чудесными — мы совершенно свободны, мы знаем друг друга и мы чувствуем себя настоящими людьми, а не винтиками в машине. Но недавно я ощутил, что мне не хватает кое-чего, от чего мы «сбежали». Понимаешь, мне ужасно хочется почитать книгу — *любую* книгу, даже учебник, даже учебник математики. Звучит дико, но я лежал здесь и мечтал разгадывать кроссворд.

А. О, нет, только не кроссворд; этим любят заниматься твои *родители*. Но я понимаю, что ты имеешь в виду. Нам не хватает умственного напряжения. Это как конец летних каникул в детстве. Каждый год в мае мы никак не могли дождаться конца школы, и дни до начала каникул тянулись еле-еле, но к сентябрю нам действительно хотелось вернуться в класс.

Б. Не могу сказать, что теперь, когда у меня есть кусок хлеба и кувшин вина и когда ты рядом, дни так уж и «тянутся». Но может быть, самое главное, что я понял за это время — незатейливой романтической жизни мне мало. Мне нужно что-нибудь хитроумное, над чем можно поразмышлять.

А. Ладно, прости, что я недостаточно сложна для тебя. Отчего бы нам не прогуляться и не исследовать побережье? Может быть, мы найдем какие-нибудь камешки или еще что-нибудь, чтобы придумать какую-то игру?

Б (*садясь*). О, здорово! Только сначала давай поплаваем.

А (*бежит к воде*). Давай! Спорим, ты меня не догонишь!

. . . .

Б. Слушай, а что это за огромный черный камень торчит из песка?

А. Хоть убей, я никогда здесь ничего подобного не видела. Смотри, сзади что-то вроде граффити.

Б. Дай-ка я посмотрю. Помоги-ка мне выкопать его. Похож на музейный экспонат. Тяжелый. Надписи могут быть древним арабским письмом... Нет, постой, это, наверное, еврейский. Давай-ка повернем его.

А. Еврейский? Ты уверен?

Б. Ну, я долго учил еврейский в молодости и почти могу это прочесть...

А. Я не слыхала, чтобы в этих местах велись интенсивные археологические раскопки. Вдруг мы нашли что-то вроде Розеттского камня? Что же здесь написано? Ты хоть чуть-чуть понимаешь?

Б. Подожди чуточку, дай я попробую... Вот здесь, справа вверху начало, что-то вроде «Вначале все было безвидно и пусто ...»

А. Ого! Звучит как первая книга Моисея из Библии. Это разве не он бродил по Аравии сорок лет, пока не пришел в Израиль? Ты же не думаешь...

Б. Нет-нет, это совершенно не похоже на традиционный текст. Давай оттащим эту штуку к нашему лагерю, я надеюсь, что смогу перевести.

А. Билл, это круто! Как раз то, что ты хотел!

Б. Ну да, я говорил, что умираю как хочу почитать. Хотя я не имел в виду именно это. Скорей бы хорошенечко все рассмотреть: кое-что мне кажется очень странным, я даже не могу понять — это какая-то история или что-то другое. Здесь что-то о числах, и ...

А. Похоже, снизу обломился кусок. Раньше камень был длиннее.

Б. Ну и хорошо, а то мы бы не смогли его дотащить. Этот облом может, конечно, случиться как раз тогда, когда мы доберемся до самого интересного места.

. . . .

А. Наконец-то мы пришли. Я пойду соберу немного фиников и фруктов на ужин, а ты пока поработай над переводом. Жаль, языки — не моя сильная сторона, а то я обязательно помогла бы тебе.

. . . .

Б. Послушай, Алиса! Я сделал это! Есть еще несколько сомнительных мест, пара непонятных мне знаков, — может быть, это устаревшие формы слов. Все же в целом я понимаю слова, которые здесь написаны, хотя не знаю, что они означают. Вот более-менее литературный перевод.

> **Вначале земля была пуста и безвидна, и Дж. Х. В. Конвей начал творить числа. Конвей сказал: «Да будут два правила, которые рождают все числа, большие и маленькие. Да будет первое правило:**
>
> **Каждому числу соответствуют два множества ранее сотворенных чисел, так что в левом множестве нет ни одного элемента, больше или равного какому-нибудь элементу в правом множестве.**
>
> **Да будет второе правило:**
>
> **Одно число меньше или равно другому, если и только если в левом множестве первого числа нет ни одного элемента, больше или равного второму числу, и в правом множестве второго числа нет ни одного элемента, меньше или равного первому числу.**
>
> **И Конвей испытал эти два правила, которые он придумал, и они были хороши. И первое число было сотворено из пустого левого множества и пустого правого множества. Конвей назвал это число нулем и сказал, что это будет знак, разделяющий положительные числа и отрицательные. Конвей доказал, что нуль меньше или равен нулю и увидел, что это хорошо. И был вечер и было утро — День Нулевой. На следующий день были сотворены еще два числа, у одного левое множество состояло из нуля, а у другого — правое. Первое из них Конвей назвал «единицей», а второе — «минус единицей». И он доказал, что минус единица меньше, но не равна нулю, а нуль меньше, но не равен единице. А вечером...**

Дальше облом.

А. Ты *уверен*, что написано именно это?

Б. Более или менее. Если я и приукрасил, то только чуть-чуть.

А. Но «Конвей»... Это не еврейское имя. Ты, должно быть, шутишь!

Б. Нет, правда. Конечно, в старинных еврейских письменах гласных нет, так что это вполне может быть Кинаву или еще что-нибудь в этом духе. Может быть, что-то про каганов? Вряд ли. Раз уж я перевожу на английский, я выбрал английское имя. Смотри, это написано вот здесь. J. H. W. H. может означать еще «Яхве».

А. Нет гласных? Тогда это возможно... А как ты думаешь, что это означает?

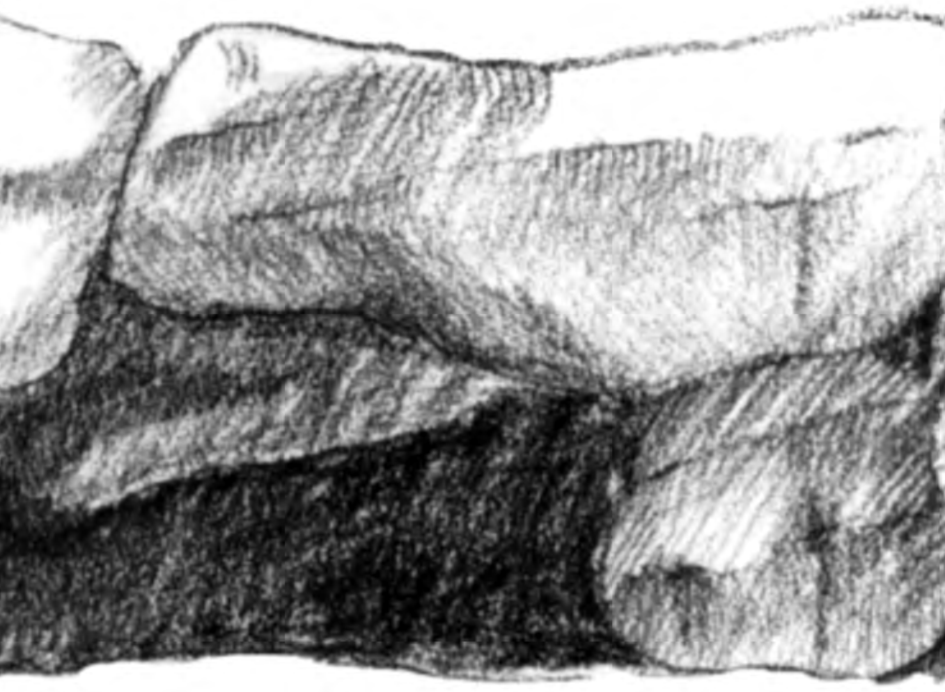
Б. Твои догадки ничем не хуже моих. Это два диких правила для чисел. Может быть, это какой-то древний метод арифметики, который был заброшен после того, как изобрели колесо. Было бы здорово завтра в нем разобраться; но солнце вот-вот зайдет, нам лучше поужинать и завалиться.

А. Ну ладно, только прочитай мне текст еще раз. Я хочу подумать над этим, ведь сперва я не поверила, что это все серьезно.

Б (*водя пальцем по строкам*). «Вначале ...»

Глава 2

СИМВОЛЫ



А. Мне кажется, Билл, в твоем Камне Конвея есть все же какой-то смысл. Я думала об этом ночью.

Б. Я тоже, но задремал, так ничего и не придумав. В чем здесь секрет?

А. На самом деле не так все сложно. Проблема в том, что все выражено словами. Все то же самое можно записать символами, и ты сам увидишь, что произойдет.

Б. Ты имеешь в виду, что нам придется воспользоваться Новой Математикой, чтобы расшифровать эту древнюю надпись на камне?

А. Мне самой не так уж хочется это признать, но вот на что это похоже. Первое правило здесь гласит, что каждое число x на самом деле — это пара множеств, мы назовем их левым множеством x_L и правым множеством x_R:

$$x = (x_L, x_R).$$

Б. Постой, вовсе не обязательно писать на песке, по-моему, у нас есть еще карандаш и немного бумаги в моем рюкзаке. Подожди секундочку... Вот, держи.

А. $$x = (x_L, x_R).$$

Здесь x_L и x_R — не просто числа, это *множества* чисел; причем каждое число в множестве — это тоже пара множеств, и так далее.

Б. Постой, твои обозначения слишком запутаны для меня. Я уже не понимаю, что здесь число, а что — множество.

А. Ладно, я буду обозначать прописными буквами множества, а строчными — числа. Тогда первое правило Конвея можно записать так:

$$x = (X_L, X_R), \quad \text{где} \quad X_L \not\geq X_R. \tag{1}$$

Это означает, что если x_L — произвольное число из множества X_L, а x_R — произвольное число из множества X_R, то они должны удовлетворять неравенству $x_L \not\geq x_R$. А это означает, что x_L не больше и не равно x_R.

Б (*чешет в затылке*). Боюсь, что ты продвигаешься слишком быстро для меня. Ты ведь уже все это переварила, а я только начинаю. Если число — это пара множеств чисел, каждое из которых — тоже пара числовых множеств, и так далее, и далее, и далее, то как же это все началось?

А. Хорошее соображение, и именно в нем видна красота замысла Конвея. Каждый элемент множеств X_L и X_R должен быть сотворен заранее, но первому дню творения не предшествовало никаких чисел, с которыми можно было бы работать, поэтому оба множества X_L и X_R были пустыми!

Б. Никогда не думал, что доживу до того дня, когда в пустом множестве объявится какой-нибудь смысл. Это все равно что сотворить нечто из ничего, правда? Но разве соотношение $X_L \not\geqslant X_R$ верно, когда оба множества X_L и X_R пусты? Как может что-то быть не равным самому себе?

А, ну да, все нормально. Это ведь означает, что в пустом множестве нет ни одного элемента, который больше или равен любому элементу пустого множества — а это верно, потому что в пустом множестве никаких элементов нет вовсе.

А. Так что все начинается по правилам, и получается число, которое называется «нулем». Если обозначить пустое множество знаком $\varnothing$, то можно записать

$$0 = (\varnothing, \varnothing).$$

Б. Невероятно.

А. На второй день можно поместить 0 в левое или правое множество, и Конвей получает еще два числа:

$$-1 = (\varnothing, \{0\}) \quad \text{и} \quad 1 = (\{0\}, \varnothing).$$

Б. Дай-ка я проверю, все ли сходится? Чтобы -1 было числом, должно выполняться условие, что ни один элемент пустого множества не больше и не равен 0. Что до 1, должно выполняться условие, что 0 не больше любого элемента пустого множества. Надо же, от этого пустого множества действительно есть толк! Пожалуй, когда-нибудь я напишу книгу под названием «Свойства пустого множества».

А. Ты ее никогда не завершишь.

Если множество X_L или X_R пусто, условие $X_L \not\geqslant X_R$ выполняется вне зависимости от того, из *чего* состоит второе множество. Это означает, что предстоит сотворить бесконечно много чисел.

Б. Ладно, а что насчет второго правила Конвея?

А. Именно его применяют, чтобы проверить, выполняется ли условие $X_L \not\geqslant X_R$, когда оба множества непусты; это правило определяет отношение «меньше или равно». Символически

$$x \leqslant y \quad \text{означает} \quad X_L \not\geqslant y \quad \text{и} \quad x \not\geqslant Y_R. \tag{2}$$

Б. Постой, ты опять опередила меня. Посмотри, X_L — это множество чисел, а y — число, то есть пара множеств. Что ты имеешь в виду, когда пишешь $X_L \not\geqslant y$?

А. Это значит, что для любого элемента множества X_L выполняется условие $x_L \not\geqslant y$. Иначе говоря, ни один элемент множества X_L не больше и не равен y.

Б. Ясно. И твое правило (2) говорит еще, что x не больше и не равен никакому элементу Y_R. Дай-ка я сверюсь с текстом.

. . . .

А. Версия камня немного отличается, но $x \leqslant y$ означает то же самое, что и $y \geqslant x$.

Б. Пожалуй, ты права. А вот еще, посмотри, что тут сбоку вырезано:

•=<:>

|=<•:>

–=<:•>

Вчера я эти символы не смог расшифровать, но твои обозначения все объясняют! Двойные точки отделяют левое множество от правого. Должно быть, ты на верном пути.

А. Ого! Везде знаки равенства! Этот резчик каменного века должно быть, использовал **–** вместо -1; его обозначения нравятся мне чуть ли не больше моих собственных.

Б. Спорим, мы недооцениваем первобытных людей. Они вели сложную жизнь и нуждались в умственной гимнастике, как и мы, — по крайней мере тогда, когда не должны были сражаться за пищу и кров. Мы всегда слишком упрощаем историю, когда бросаем взгляд назад.

А. Да, но иначе нам не удалось бы оглядываться назад.

Б. Понимаю.

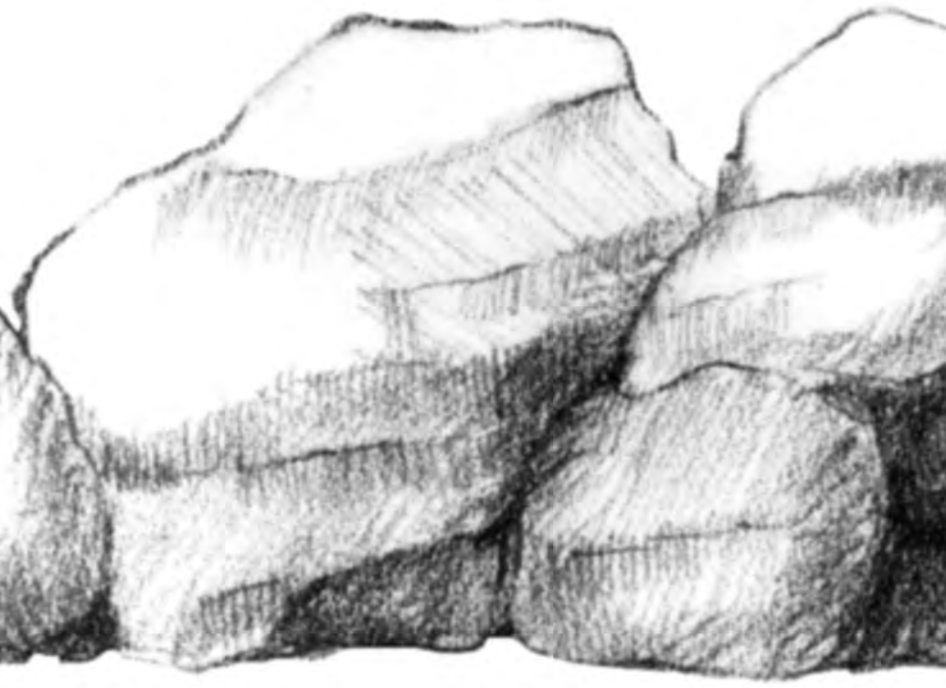
А. А теперь идет непонятный кусок текста. В первый день творения Конвей «доказывает», что $0 \leqslant 0$. Зачем ему вообще нужно доказывать, что что-то меньше или равно самому себе, — и так ясно, что оно равно себе. А на второй день он «доказывает», что -1 не равно 0; разве это не очевидно без доказательства, ведь -1 — совсем другое число?

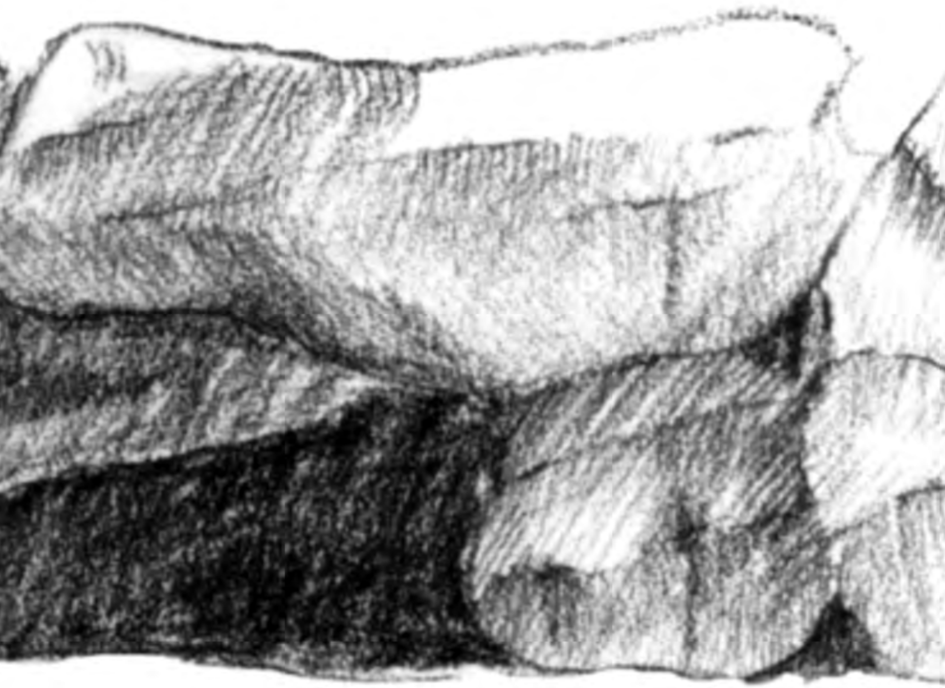
Б. Ммм... Не знаю как ты, а я уже готов еще раз искупаться.

А. Ладно. Волны так и манят, и я не привыкла так много сосредоточиваться. Идем!

Глава 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА





Б. Пока мы там плескались, мне в голову пришла одна идея. Может быть, мой перевод *неправильный*.

А. Что-о? Да он просто *обязан* быть правильным, мы ведь уже столько всего проверили.

Б. Я знаю, но теперь, когда я поразмыслил, я уже не вполне уверен насчет того слова, которое я перевел как «равно». Может быть, у него более слабое значение, что-то вроде «похоже» или «как». Тогда второе правило Конвея звучит так: «Одно число меньше или *похоже* на другое, если и только если …» А потом он доказывает, что нуль меньше или *похож* на нуль, минус один меньше, но не похож на нуль; и так далее.

А. Да, должно быть, так оно и есть, он использует это слово в абстрактном техническом смысле, который должен быть определен правилами. Так что *разумеется*, он хочет доказывать, что 0 меньше или похож на нуль чтобы убедиться, что это определение приводит к числам, «похожим» на себя.

Б. Так что, проходит его доказательство? По правилу (2) он должен показать, что ни один элемент пустого множества не больше и не похож на 0, и что 0 не больше и не похож ни на один элемент пустого множества. … Что ж, проходит, пустое множество вновь работает.

А. Гораздо интереснее то, как он доказывает, что число -1 *не* похоже на 0. Единственное, что мне приходит в голову, — доказать, что 0 не меньше-или-похож на -1. Ведь у нас есть правило (2), которое показывает, когда одно число меньше-или-похоже на другое, и если x не меньше-или-похож на y, то x не меньше и не похож на y.

Б. Ясно, мы хотим показать, что утверждение $0 \leqslant -1$ неверно. В правиле (2) нужно взять $x = 0$ и $Y_R = \{0\}$, тогда $0 \leqslant -1$, если и только если $0 \ngeqslant 0$. Но 0 *действительно* $\geqslant 0$, мы это уже знаем, поэтому $0 \leqslant -1$. Он прав.

А. Интересно, сравнивал ли Конвей -1 и 1; думаю, что да, хотя Камень об этом ничего не говорит. Если правила хоть на что-то годятся, должен быть способ показать, что -1 меньше чем 1.

Б. Хорошо, давай посмотрим. -1 — это $(\varnothing, \{0\})$, а 1 — это $(\{0\}, \varnothing)$; в который раз работает пустое множество, и мы получаем, что $-1 \leqslant 1$ по правилу (2). С другой стороны, по правилу (2) соотношение $1 \leqslant -1$ означает, что $0 \ngeqslant -1$ и $1 \ngeqslant 0$, а мы знаем, что оба эти утверждения ложны. Поэтому $1 \nleqslant -1$ и должно выполняться неравенство $-1 < 1$. Похоже, что правила Конвея работают.

А. Да, но до сих пор почти во всех рассуждениях мы использовали пустое множество, так что пока не ясно, что же можно вывести из этих правил, если использовать их полностью. Ты ведь заметил, что все доказанные до сих пор утверждения укладываются в одну схему: «Если X и Y — произвольные множества чисел, то $x = (\varnothing, X)$ и $(Y, \varnothing)$ — числа, и к тому же $x \leqslant y$».

Б. Как ловко ты доказала бесконечно много утверждений, рассмотрев схему, которую я применил только пару раз. Думаю, это называется абстракцией, или обобщением, или как-то так. А можешь ли ты доказать, что x строго *меньше* y? Так было во всех простых случаях, и я готов поспорить, что это верно и в общем.

А. Хм... Похоже нет; не тогда, когда оба множества X и Y пусты, ведь это означало бы, что $0 \not\geqslant 0$. Но в других ситуациях твое предположение кажется интересным. Давай рассмотрим случай, когда X — пустое множество, а Y — нет; верно ли, что 0 меньше $(Y, \varnothing)$?

Б. В таком случае я бы назвал $(Y, \varnothing)$ «положительным» числом. Должно быть, именно это Конвей имел в виду, когда говорил, что нуль разделяет положительные и отрицательные числа.

А. Да, но вот смотри. По правилу (2) получаем $(Y, \varnothing) \leqslant 0$, если и только если ни какое число из Y не больше и не похоже на 0. Если, например, Y — это множество $\{-1\}$, то $(Y, \varnothing) \leqslant 0$. Ты хочешь, чтобы положительные числа были меньше или равны 0?

Жалко, что я с тобой не поспорила.

Б. Ммм... Ты полагаешь, что число $(Y, \varnothing)$ должно быть положительным только тогда, когда множество Y содержит какое-то число, которое равно нулю или больше? Думаю, что ты права. Но зато теперь мы понимаем все высеченное на камне.

А. Все до того места, где кусок обломился.

Б. Ты хочешь сказать....

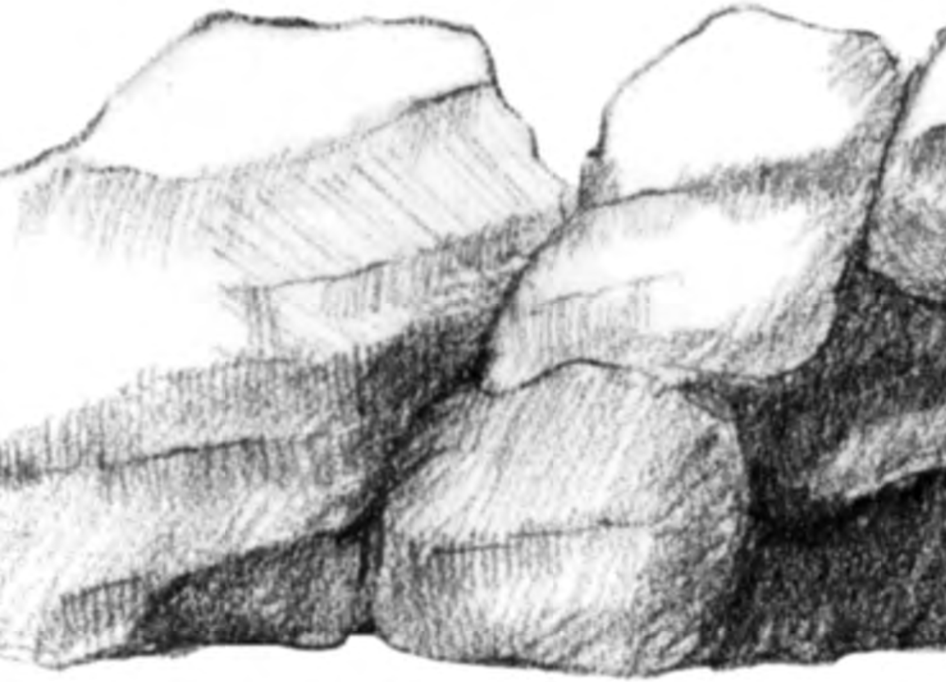
А. Мне интересно, что случилось на *третий* день.

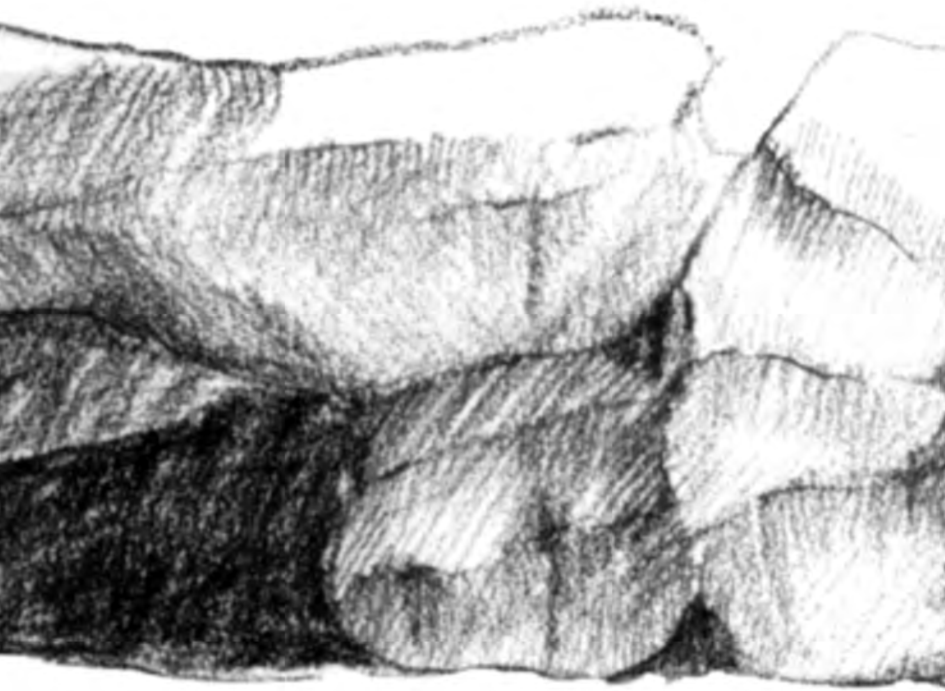
Б. Ну, должно быть, мы в состоянии разобраться в этом, раз уж теперь мы знаем правила. Было бы здорово проработать третий день после ланча.

А. Лучше бы ты наловил рыбы, наши запасы сушеного мяса, похоже, иссякают. А я пойду поищу кокосы.

Глава 4

ПЛОХИЕ ЧИСЛА





Б. Я работаю над задачей Дня Третьего, и мне она кажется довольно сложной. Когда создаются все новые и новые числа, количество возможных множеств растет очень быстро. Спорим, к седьмому дню Конвей склонялся к отдыху.

А. Так оно и есть. Я тоже работаю над этой задачей, и в День Третий у меня получилось семнадцать чисел.

Б. Правда? Я нашел девятнадцать; должно быть, ты парочку пропустила. У меня вышел такой список:

<:> <–:> <•:> <|:> <–•:>

<–|:> <•|:> <–•|:> <:–> <:•>

<:|> <:–•> <:–|> <:•|> <:–•|>

<–:•> <•:|> <–•:|> <–:•|>

А. Я смотрю, ты пользуешься обозначениями с Камня. А зачем ты включил в список **< : >**? Ведь это число было создано еще в первый день.

Б. Ну, я должен был сравнить новые числа со старыми, чтобы убедиться, что все в порядке.

А. А я в свой список семнадцати внесла только новые числа, так что на самом деле в конце Дня Третьего должно было оказаться двадцать различных чисел. Смотри, ты позабыл про

<–:|>.

Б (*моргая*). Точно. Гм... 20 на 20, это 400 разных случаев, которые нужно рассмотреть в правиле (2). Работы много, а удовольствия не очень. Но ничего не поделаешь, я не успокоюсь, пока не разберусь.

А. Может быть, нам подумать, как упростить работу, раз уж мы начали.

Б. Да уж, было бы неплохо.

Кстати, я уже получил один результат: 1 меньше, чем $(\{1\}, \varnothing)$. Сначала мне нужно было доказать, что $0 \not\geqslant (\{1\}, \varnothing)$.

А. А я попробовала другой подход. Правило (2) гласит, что мы должны проверить каждый элемент множества X_L, чтобы убедиться, что он не больше чем или похож на y, но вовсе не обязательно делать так много проверок. Если произвольный элемент множества X_L оказывается $\geqslant y$, то *самый большой* элемент X_L должен быть $\geqslant y$. Точно так же, мы должны сравнивать x только с *самым маленьким* элементом Y_R.

Б. Да, вроде так. Я могу доказать, что 1 меньше $(\{0,1\},\varnothing)$ точно так же, как я доказал, что 1 меньше $(\{1\},\varnothing)$; похоже, лишний 0 в X_L никакой роли не играет.

А. Если мои слова верны, это сэкономит нам кучу работы, ведь любое число (X_L, X_R) во всех отношениях $\leqslant$ будет давать тот же результат, как если заменить множество X_L его наибольшим элементом, а множество X_R — его наименьшим. Нам не придется рассматривать числа, в которых множество X_L или X_R содержит два или больше элементов; десять из тех двадцати чисел можно исключить!

Б. Не уверен, что мне здесь все ясно, но я понятия не имею, как мы можем доказать такую штуку!

А. Похоже, нам нужно доказать что-то типа того:

$$\text{если} \quad x \leqslant y \quad \text{и} \quad y \leqslant z, \quad \text{то} \quad x \leqslant z. \tag{T1}$$

Мне не кажется, что это очевидно, хотя согласуется с тем, что мы уже знаем.

Б. В любом случае, это утверждение должно быть верно, если числа Конвея ведут себя хоть сколько-нибудь прилично. Мы можем двигаться дальше, приняв его на веру, хотя было бы неплохо, исходя из одних только правил Конвея раз и навсегда установить, что оно истинно.

А. И тогда мы сможем разгадать загадку Дня Третьего, особо не утруждаясь. Давай поглядим, как же это можно доказать?

Б. Достали меня эти мухи! Только я попытался сконцентрироваться! Алиса, ты можешь… или нет, я лучше пойду прогуляюсь.

. . . .

Есть успехи?

А. Нет, похоже, я хожу по замкнутому кругу. А использование $\ngeqslant$ вместо $\leqslant$ ясности не добавляет. Все начинается с отрицания и все становится ужасно запутанным.

Б. Может быть, утверждение (T1) ложно.

А. Да оно просто *должно быть* истинным. Слушай, а это идея! Мы попробуем его *опровергнуть*! И если у нас не получится, то причина неудачи и будет доказательством истинности!

Б. Звучит заманчиво — доказывать, что утверждение ложно, всегда проще.

А. Допустим, у нас есть три числа x, y и z такие, что

$$x \leqslant y, \quad y \leqslant z \quad \text{и} \quad x \nleqslant z.$$

Что говорит нам правило (2) о таких «плохих» числах?

Б. Оно говорит, что

$$\begin{aligned} X_L &\ngeqslant y \\ \text{и} \qquad x &\ngeqslant Y_R, \\ \text{и} \qquad Y_L &\ngeqslant z, \\ \text{и} \qquad y &\ngeqslant Z_R, \end{aligned}$$

и к тому же что $x \nleqslant z$. Ну и что с того?

А. Это значит, что одно из двух условий не выполнено. Или в множестве X_L существует такой элемент x_L, для которого $x_L \geqslant z$, или в множестве Z_R найдется элемент z_R такой, что $x \geqslant z_R$. Зная все эти факты про x, y и z, мы сможем доказать хоть *что-нибудь*.

Б. Так. Раз уж x_L — это элемент X_L, он не может быть больше или похожим на y. Допустим, он меньше y. Но $y \leqslant z$, поэтому x_L должен быть... Нет, прости, нельзя использовать недоказанные пока факты про числа.

Пойдем другим путем. Мы знаем, что $y \leqslant z$, $z \leqslant x_L$ и $y \nleqslant x_L$. Это дает нам еще три плохих числа, и мы можем вывести еще больше фактов. Но выглядит это безнадежно запутанным.

А. Билл! Ты сделал это!

Б. Да ну?

А. Если (x, y, z) — три плохих числа, то возможно всего два случая.

Случай 1. Для некоторого элемента x_L выполняется $x_L \geqslant z$. Тогда (y, z, x_L) — еще три плохих числа.

Случай 2. Для некоторого элемента z_R выполняется $z_R \leqslant x$. Тогда (z_R, x, y) — еще три плохих числа.

Б. Тебе не кажется, что ты по-прежнему ходишь по замкнутому кругу? Плохих чисел становится все больше и больше.

А. Нет, в обоих случаях новые плохие числа *проще*, чем исходные. Одно из них было сотворено раньше. Мы не можем продолжать так все дальше и дальше, находя множества, сотворенные все раньше и раньше. Поэтому плохих множеств не может быть вовсе!

Б (*просияв*). Круто! Твои слова означают вот что:

Каждое число x было сотворено в некоторый день $d(x)$. Если имеется три плохих числа (x, y, z), для которых сумма дней творения равна $d(x) + d(y) + d(z) = n$, то имеет место один из двух случаев, и это дает нам три других плохих числа, для которых сумма дней творения меньше n. Они дадут новую тройку, у нее сумма дней творения еще меньше, и так далее. А этого не может быть, ведь не существует трех чисел, для которых сумма дней творения меньше 3.

А. Точно! Сумма дней творения — отличное средство формализовать доказательство. Если не найдется трех плохих чисел (x, y, z), для которых сумма дней творения меньше n, то два случая показывают, что нет и таких, для которых сумма дней творения равна n. По-моему, это доказательство по индукции по сумме дней творения.

Б. Это просто ученые слова. Главное — *идея.*

А. Это так, но идее нужно имя, чтобы нам было проще применять ее в следующий раз.

Б. Да уж, боюсь, что следующий раз непременно наступит...

Ладно, не вижу смысла заморачиваться этим жаргоном Новой Математики. Ты это понимаешь, и я это понимаю — мы только что доказали *транзитивный закон.*

А (*вздыхая*). Неплохо для двух математиков-любителей!

Б. На самом деле это твоя заслуга. Настоящим постановляю, что транзитивный закон (T1) отныне и во веки веков называется Теоремой Алисы.

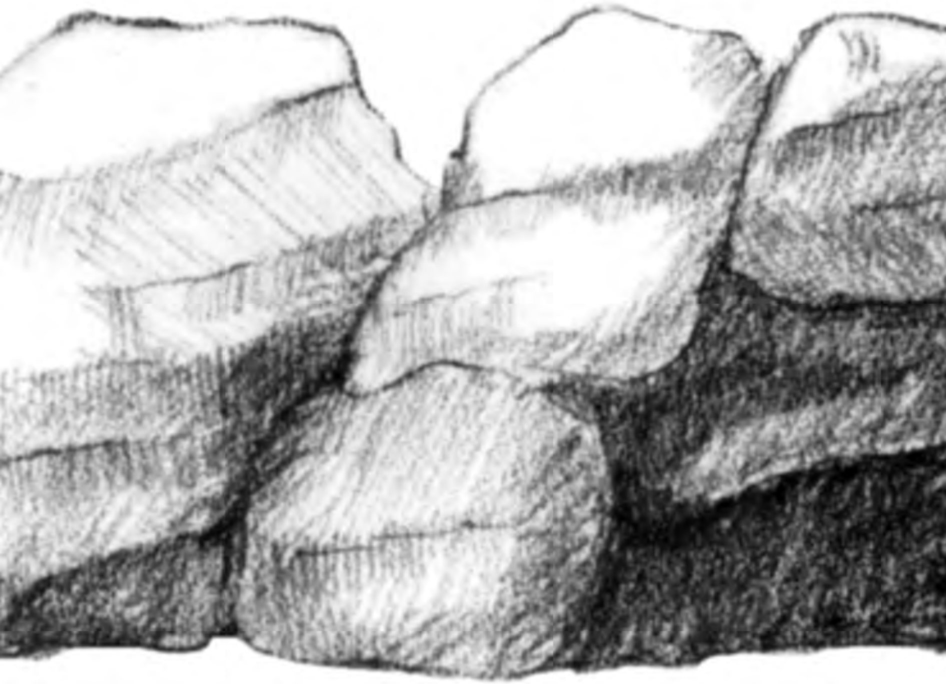
А. Брось, я уверена, что Конвей открыл ее давным-давно.

Б. А что, от этого твои усилия стали менее креативными? Спорим, каждый великий математик начинал с переоткрывания кипы «хорошо известных» результатов.

А. О нет, давай не будем отвлекаться на мечты о величии! Лучше получим удовольствие от того, что есть.

Глава 5

ПРОГРЕСС



Б. Мне в голову пришла мысль. Может случиться так, что найдутся два числа, вовсе никак не связанных друг с другом? То есть таких, что

$$x \nleqslant y \quad \text{и} \quad y \nleqslant x?$$

Словно бы одно из них не видит другого или находится в другом измерении или еще что-нибудь в этом роде. Такого не должно случаться, но как это можно доказать?

А. Думаю, мы сможем действовать так, как раньше. Если x и y — плохие числа в этом смысле, то тогда либо $x_L \geqslant y$, либо $x \geqslant y_R$ для некоторого элемента y_R.

Б. Гмм... Пусть $y \leqslant x_L$. Тогда, если $x_L \leqslant x$, то по нашему транзитивному закону $y \leqslant x$. К тому же мы считаем, что $y \not\leqslant x$. Поэтому $x_L \not\leqslant x$. В другом случае, когда $y_R \leqslant x$, такие же рассуждения показывают, что $y \not\leqslant y_R$.

А. Ух ты, как мудро! Теперь, чтобы показать, что так не бывает, нам остается только доказать одну вещь, которая мне уже давно пришла в голову: любое число x должно лежать между всеми элементами его множеств X_L и X_R. В смысле

$$X_L \leqslant x \quad \text{и} \quad x \leqslant X_R. \tag{T2}$$

Б. Ну, это не должно быть сложно. Что означает $x_L \not\leqslant x$?

А. Что или в множестве X_{LL} есть элемент x_{LL} такой, что $x_{LL} \geqslant x$, или что в множестве X_R существует элемент x_R такой, что $x_L \geqslant x_R$. Но по правилу (1) второго не бывает.

Б. Я *знал*, что правило (1) нам рано или поздно понадобится. А что делать с x_{LL}? Не люблю двойные индексы.

А. Ну, x_{LL} — это элемент левого множества числа x_L. Раз оно было сотворено раньше x, мы можем по крайней мере полагать, что $x_{LL} \leqslant x_L$, по индукции.

Б. Та-а-ак, дальше.

А. Смотри, $x_{LL} \leqslant x_L$ означает, что $x_{LLL} \not\geqslant x_L$ и ...

Б (*перебивая*). На это даже смотреть не хочется — твои индексы становятся все уродливее.

А. Спасибо за помощь.

Б. Но ведь я *действительно* помогаю, предостерегая тебя: держись подальше от этих гадких лохматых индексов.

А. Но я... Ладно, ты прав, прости меня, — я так глупо удалилась от темы. Мы получили $x \leqslant x_{LL}$ и $x_{LL} \leqslant x_L$, так что по транзитивному закону $x \leqslant x_L$. Так мы, вероятно, избежим лишних индексов.

Б. Вот, так-то лучше. Не может быть, чтобы $x \leqslant x_L$, ведь это означало бы $X_L \not\geqslant x_L$, что невозможно, так как x_L — один из элементов множества X_L.

А. Здорово. Но как ты докажешь, что $x_L \leqslant x_L$?

Б. Что? По твоим словам, мы забрались в такие дебри и до сих пор не установили, что каждое число похоже на себя? Невероятно... Я уверен — есть простое доказательство.

А. Может быть, тебе и так ясно, но я не считаю, что это очевидно. В любом случае, давай докажем, что

$$x \leqslant x. \tag{T3}$$

Это значит, что $X_L \not\geqslant x$ и $x \not\geqslant X_R$.

Б. Очень напоминает (T2). Упс! Мы вернулись туда, откуда вышли, пытаясь доказать невозможность $x \leqslant x_L$.

А. Но в этот раз все в порядке. Твои рассуждения показывают, что из $x \leqslant x_L$ следует $x_L \not\geqslant x_L$, что невозможно по индукции.

Б. Прекрасно! Значит, утверждение (T3) верно, и все складывается. Мы доказали половину (T2) — $X_L \leqslant x$, а к оставшейся половине должны быть применимы те же рассуждения, только везде придется поменять лево и право.

А. И как мы уже сказали раньше, утверждения (T2) достаточно, чтобы доказать, что все числа связаны каким-нибудь отношением; иначе говоря,

$$\text{если} \quad x \not\leqslant y, \quad \text{то} \quad y \leqslant x. \tag{T4}$$

Б. Точно. Наконец-то можно прекратить выражаться так иносказательно, ведь «$x \not\geqslant y$» — это то же самое, что «x меньше y».

А. Понятно. Это то же самое, что «x меньше или похож на y, но не похож на y». Теперь мы можем писать

$$x < y$$

вместо $x \not\geqslant y$, а исходные правила (1) и (2) выглядят гораздо приятнее. Интересно, почему Конвей сразу не дал таких определений?

Наверное, потому, что тогда пришлось бы вводить третье правило, определяющее отношение «меньше», а Конвею не хотелось увеличивать количество правил.

Б. А мне интересно, можно ли найти два различных числа, похожих друг на друга. То есть, могут ли выполняться оба отношения $x \leqslant y$ и $x \geqslant y$, когда множества X_L и Y_L не совпадают?

А. Конечно, мы что-то такое видели до обеда. Разве ты не помнишь, мы выяснили, что $0 \leqslant y$ и $y \leqslant 0$, если $y = (\{-1\}, \varnothing)$. А я думаю, что $(\{0,1\}, \varnothing)$ должно быть похоже на $(\{1\}, \varnothing)$.

Б. Ты права. Я думаю, что когда $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то оба числа x и y по сути одинаковы для всех практических целей, ведь по транзитивному закону $x \leqslant z$ тогда и только тогда, когда $y \leqslant z$. Числа x и y взаимозаменяемы.

А. И еще. У нас получается два транзитивных закона. Я имею в виду

$$\text{если} \quad x < y \quad \text{и} \quad y \leqslant z \quad \text{то} \quad x < z; \tag{T5}$$

$$\text{если} \quad x \leqslant y \quad \text{и} \quad y < z \quad \text{то} \quad x < z. \tag{T6}$$

Б. Здорово. Фактически, оба они непосредственно следуют из (T1), если считать, что $x < y$ эквивалентно $x \not\geqslant y$. Чтобы доказать (T5) или (T6), вовсе не нужно использовать (T2), (T3) или (T4).

А. Ты только посмотри, сколько мы всего здесь доказали! Поразительно, как много следует из двух правил Конвея.

Б. Алиса, сегодня я увидел тебя новыми глазами. Ты опровергаешь миф о том, что женщины не могут заниматься математикой.

А. Благодарю тебя, о галантный рыцарь!

Б. Я знаю, что это звучит глупо, но работая над этим актом творения с тобой вместе, я почувствовал себя настоящим жеребцом! Казалось бы, такой напряженный умственный труд должен убивать все физические желания, но на самом деле я давно уже не чувствовал себя так, как теперь.

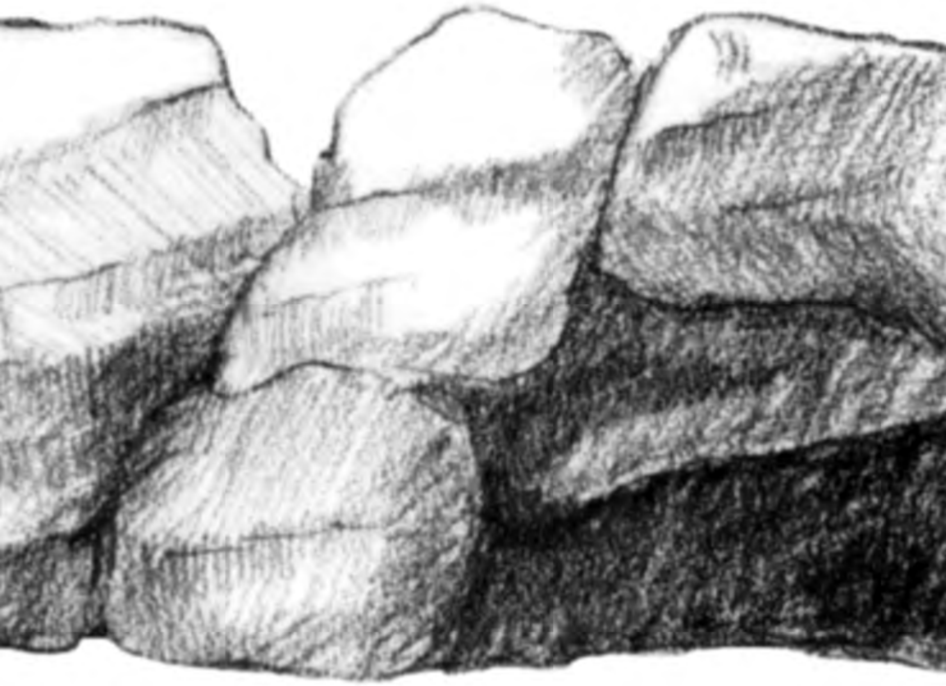
А. Я, по-правде, тоже.

Б. Посмотри на этот заход солнца, прямо как на календаре, который у нас когда-то был. А посмотри на воду!

А (*на бегу*). Пойдем!

Глава 6

ДЕНЬ ТРЕТИЙ



Б. Слушай, мне еще никогда в жизни не спалось так хорошо.

А. Мне тоже. Так здорово проснуться и чувствовать настоящую бодрость, а не кофеиновую.

Б. На чем мы вчера остановились, прежде чем потеряли головы и выкинули из них всю математику?

А (*улыбаясь*). По-моему, мы как раз доказали, что числа Конвея ведут себя как подобает всем старым добрым числам; их можно расположить по порядку, от наименьшего к наибольшему, причем каждое число будет больше тех, что слева от него, и меньше тех, что справа.

Б. Мы вправду это доказали?

А. Да. Все равно все непохожие числа упорядочиваются в силу теоремы (T4). Каждое вновь сотворенное число должно найти себе место среди остальных.

Б. Теперь нам должно быть легко разобраться с тем, что произошло в День Третий. Потребуется сделать не 20×20 сравнений, а гораздо меньше. По теоремам (T2) и (T3)

$$\langle : - \rangle < - < \langle - : \bullet \rangle < \bullet < \langle \bullet : | \rangle < | < \langle | : \rangle,$$

так что семь чисел уже упорядочены, и нужно только втиснуть остальные в этот ряд.

Знаешь, после всех этих упрощений я получаю больше удовольствия, чем от кроссворда.

А. Мы знаем, например, что число

$$\langle - : | \rangle$$

лежит где-то между $-$ и $|$. Давай сравним его со средним элементом — с нулем.

Б. Тааак. Это число и $\geqslant 0$, и $\leqslant 0$, так что оно обязано быть *похожим* на 0, по правилу (2). Как я говорил вчера, оно по сути равно нулю, так что мы можем про него забыть. Чисел становится на восемь меньше, их остается всего двенадцать.

А. Давай постараемся избавиться от десяти случаев, когда в множестве X_L или X_R больше одного элемента. Я пыталась сделать это вчера утром. Вечером мне пришла в голову мысль, которая может сработать. Пусть $x = (X_L, X_R)$ — число, и мы берем два других произвольных множества чисел Y_L и Y_R, причем

$$Y_L < x < Y_R.$$

По-моему, тогда x должно быть похожим на число z, где

$$z = (X_L \cup Y_L, X_R \cup Y_R).$$

Другими словами, расширение множеств X_L и X_R добавлением чисел с правильной стороны по сути не меняет x.

Б. Похоже на правду. В любом случае, по правилу (1) z — это число; раньше или позже оно будет сотворено.

А. Чтобы показать, что $z \leqslant x$, мы должны доказать, что

$$X_L \cup Y_L < x \quad \text{и} \quad z < X_R.$$

А теперь это просто, ведь мы знаем, что $X_L < x$, $Y_L < x$ и $z < X_R \cup Y_R$ по теореме (T3).

Б. Если в этом рассуждении поменять местами лево и право, мы тотчас же получим $x \leqslant z$. Ты права, это действительно верно:

$$\text{если} \quad Y_L < x < Y_R, \quad \text{то} \quad x \equiv (X_L \cup Y_L, X_R \cup Y_R). \quad \text{(T7)}$$

(Я буду писать $x \equiv z$, когда x похоже на z, то есть $x \leqslant z$ и $z \leqslant x$).

А. Это то, что надо. Например,

<−•:|> $\equiv$ **<•:|>**, **<:−•>** $\equiv$ **<:−>**

и так далее.

Б. Так что нам осталось только два случая: **<−:>** и **<:|>**.

А. На самом деле теорема (T7) применима к ним обоим тоже при $x = 0$!

Б. Ум-ни-ца! Мы полностью проанализировали День Третий; только те семь чисел, которые мы перечислили раньше, по существу различны.

А. Будет странно, если эти же идеи не сработают в последующие дни. Допустим, за n дней были созданы числа

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m.$$

Тогда среди новых чисел, сотворенных в $(n+1)$-й день могут быть только

$$(\varnothing, \{x_1\}), \ (\{x_1\}, \{x_2\}), \ldots, (\{x_{m-1}\}, \{x_m\}), \ (\{x_m\}, \varnothing).$$

Б. Алиса, ты чудо! Если мы это докажем, мы разберемся с бесконечно многими днями одним махом! Ты опережаешь самого Творца.

А. А вдруг мы это не докажем?

Б. Давай хотя бы разберем несколько частных случаев. Скажем, если взять число $(\{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\})$, оно должно быть равно одному из уже сотворенных.

А. Разумеется, оно равно x_i по теореме (T7). В множестве X_{iL} каждый элемент $\leqslant x_{i-1}$, а в множестве X_{iR} каждый элемент $\geqslant x_{i+1}$. Значит, по теореме (T7)

$$x_i \equiv (X_{iL} \cup \{x_{i-1}\}, X_{iR} \cup \{x_{i+1}\}).$$

И все по той же теореме (T7)

$$(\{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\}) \equiv (\{x_{i-1}\} \cup X_{iL}, \{x_{i+1}\} \cup X_{iR}).$$

А по транзитивному закону $x_i \equiv (\{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\})$.

Б (*качая головой*). Невероятно, Холмс!

А. Элементарно, дорогой Уотсон. Это просто дедукция.

Б. Твои индексы далеки от совершенства, но в этот раз я не буду придираться. А что ты будешь делать с числом $(\{x_{i-1}\}, \{x_{j+1}\})$, если $i < j$?

А (*пожимая плечами*). Я боялась, что ты это спросишь. Не знаю.

Б. Здесь могли бы сработать те же рассуждения, если бы нашлось число x, для которого в множестве X_L каждый элемент был бы $\leqslant x_{i-1}$, и в множестве X_R каждый элемент был бы $\geqslant x_{j+1}$.

А. Ты прав, а я это прозевала. Но все эти элементы x_i, $x_{i+1}, \ldots, x_j$ могут путаться друг у друга под ногами.

Б. Пожалуй, да... Нет, вот как должно быть: пусть x — тот из элементов x_i, $x_{i+1}, \ldots, x_j$, который был сотворен *первым.* Тогда множества X_L и X_R не могут включать множества других элементов. Поэтому $\big(\{x_{i-1}\}, \{x_{j+1}\}\big) \equiv x$.

А. Дай-ка, я тебя поцелую.

. . . .

. . . .

Б (*улыбаясь*). Все же задача пока не разрешена до конца; мы должны рассмотреть числа вроде $(\varnothing, \{x_{j+1}\})$ и $(\{x_{i-1}\}, \varnothing)$.

Но в первом случае мы получаем число, сотворенное первым среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_j$. А во втором случае — это число, порожденное первым среди $x_{i+1}, \ldots, x_m$.

А. А что если число, порожденное первым, не единственное? Вдруг из чисел $x_i, \ldots, x_j$ несколько были сотворены в один и тот же самый ранний день?

Б. Упс... Да нет, все нормально, такого не может случиться, ведь доказательство все еще в силе и оно показывает, что такие два числа были бы похожи друг на друга, а это невозможно.

А. Круто! Ты решил задачу всех дней сразу.

Б. С твоей помощью. Смотри, в День Четвертый будет 8 новых чисел, в Пятый — еще 16, и так далее.

А. Да, после n-го дня будет сотворено ровно $2^n - 1$ чисел.

Б. Знаешь, по-моему этот парень — Конвей — был не такой уж умный. В смысле, он мог бы задать правила гораздо проще, а эффект был бы тот же. Нет смысла разглагольствовать про все эти множества и прочую ерунду. Ему можно было просто сказать, что новые числа создаются в промежутках между соседними существующими или на концах.

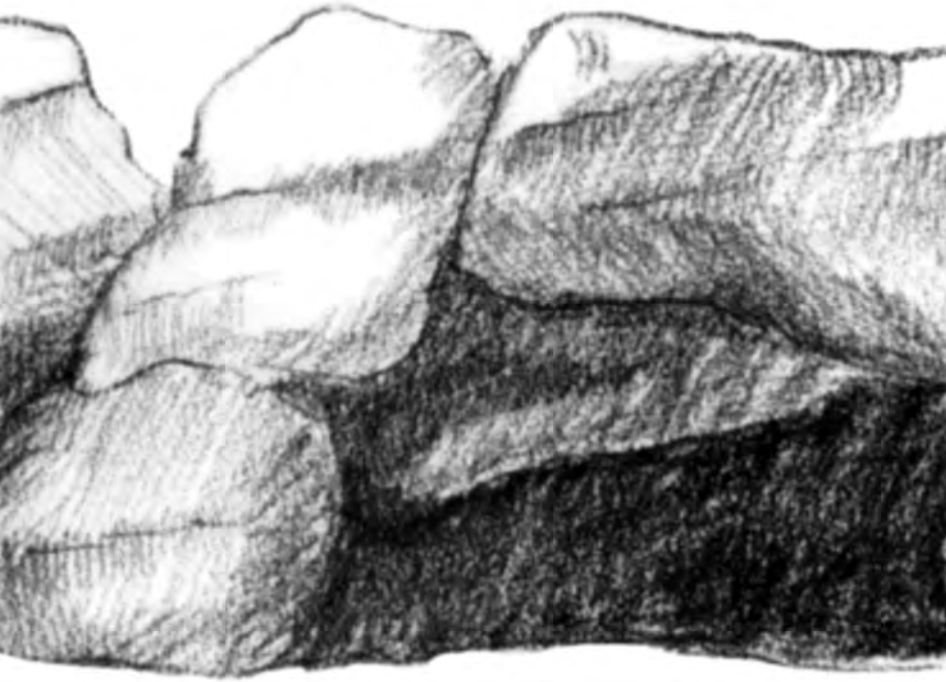
К. **Ерунда. Погодите, вы еще доберетесь до бесконечных множеств.**

А. Что это было? Ты слышал? Похоже на гром.

Б. Боюсь, скоро начнется сезон дождей.

Глава 7

ОТКРЫТИЕ



А. Ну хорошо, вот мы решили все задачи этого Камня, только меня никак не покидает ощущение, что мы много чего пропустили.

Б. Что ты имеешь в виду?

А. Разные вещи. Скажем, мы знаем, что произошло в День Третий: были созданы четыре числа. Но мы же не знаем, как называл их Конвей.

Б. Ну, одно число было больше 1, так что он, скорее всего, назвал его 2. А еще одно число было между 0 и 1, так что он мог называть его $\frac{1}{2}$.

А. Дело не в этом. Меня беспокоит вот что: разве они вправду *числа*? Ведь чтобы они были числами, мы должны уметь их складывать, вычитать и все такое.

Б (*хмурясь*). Понимаю. Ты думаешь, на отвалившемся куске камня Конвей дал еще несколько правил, которые и делали числа числами. У нас есть только куча объектов, аккуратно расставленных в ряд, но мы ничего не можем с ними делать.

А. Ну я не настолько ясновидящая, чтобы угадать, что он придумал. Если он вообще что-то придумывал.

Б. Мы застряли — если только не сможем отыскать недостающую часть камня. А я не помню даже, где мы нашли первую.

А. Это-то я помню, я даже записала точное местоположение на случай, если нам вздумается вернуться.

Б. Что бы я без тебя делал? Пошли скорее.

А. Стой, разве мы не должны вначале пообедать?

Б. Правильно, я настолько погряз во всем этом, что позабыл о пище. Ладно, пойдем чего-нибудь куснем, а потом займемся раскопками.

. . . .

А (*копая*). Билл, боюсь, у нас ничего не получится. Почва под песком такая твердая, здесь нужны специальные инструменты.

Б. Да, скрести ее ножом — не лучший метод. О-о, дождь пошел. Вернемся в лагерь?

А. Смотри, там в скале пещера. Давай переждем грозу там. Льет всерьез!

. . . .

Б. Как здесь темно. Ох! Я сбил себе палец обо что-то. Чтоб ему…

А. Билл! Ты нашел! Ты споткнулся об обломок Камня Конвея!

Б. Ого, похоже, ты права. Помоги мне вытащить его под дождь, вода смоет пыль и мы сможем…

Ух ты, у меня получилось разобрать слова «Конвей» и «число», это должно быть то, что мы ищем.

А. У нас теперь есть чем заняться! Мы спасены!

Б. То, что нам нужно, действительно здесь. Но я хочу вернуться обратно в пещеру, эта гроза не может продолжаться долго.

А (*следуя за ним*). Да уж, мы вымокли до нитки.

. . . .

Б. Интересно, почему математика, такая нудная в школе, кажется такой интересной здесь? Ты помнишь Ландау, нашего учителя? Я всерьез ненавидел его уроки: теорема, доказательство, лемма, замечание, теорема, доказательство, … полный отстой.

А. Да, я помню: было очень трудно бороться со сном. Интересно, не произойдет ли с *нашими* прекрасными открытиями то же самое?

Б. Точно. У меня возникло безумное желание выступить перед товарищами и рассказать о наших результатах: теорема, доказательство, лемма, замечание. Я бы сделал это так гладенько, никто бы и не догадался, как мы дошли до этого, все бы *так* поразились.

А. Или заскучали.

Б. Да, в этом-то все и дело. Я думаю, что радость и красота приходят, когда ты сам делаешь открытия, а не когда слушаешь.

А. Но это же *действительно* прекрасно! Мне нравилось слушать о твоих открытиях почти так же сильно, как делать их самой. В чем же разница?

Б. Да, тут ты права. Я действительно был готов понять то, что сделала *ты*, потому что сам пытался справиться с той же задачей.

А. Раньше было скучно, потому что мы были *непричастны*; нам просто велели усвоить то, что сделал кто-то другой, и мы ничего интересного про это не знали.

Б. С этого дня, читая книгу по математике, я буду пытаться сам вывести все результаты, не подсматривая в решения. Если даже у меня не получится, после я смогу понять всю красоту доказательства.

А. А я думаю, в первую очередь надо еще пытаться понять, откуда взялась теорема; или по крайней мере, как и почему кому-то пришло в голову ее доказывать. Стоит представить себя на месте первооткрывателя. Творческая часть гораздо интереснее дедуктивной. Вместо того, чтобы концентрироваться на поиске правильных ответов на вопросы, гораздо интереснее узнать, откуда берутся хорошие вопросы.

Б. Что-то есть в твоих словах. Хотел бы я, чтобы наши учителя давали нам задачи вроде «узнай что-то интересное про x», а не просто «докажи x».

А. Точно. Но учителя такие консервативные, они побоятся отпугнуть зубрил, которые послушно и механично выполняют всю домашнюю работу. Кроме того, им не понравится лишняя работа — проверять ответы на открытые вопросы. Традиционный путь — отложить все творческие вопросы до выпуска из школы. Семнадцать лет или больше учеников натаскивают на экзамены, а потом, после всех экзаменов заявляют — а теперь пойдите и сделайте что-нибудь оригинальное.

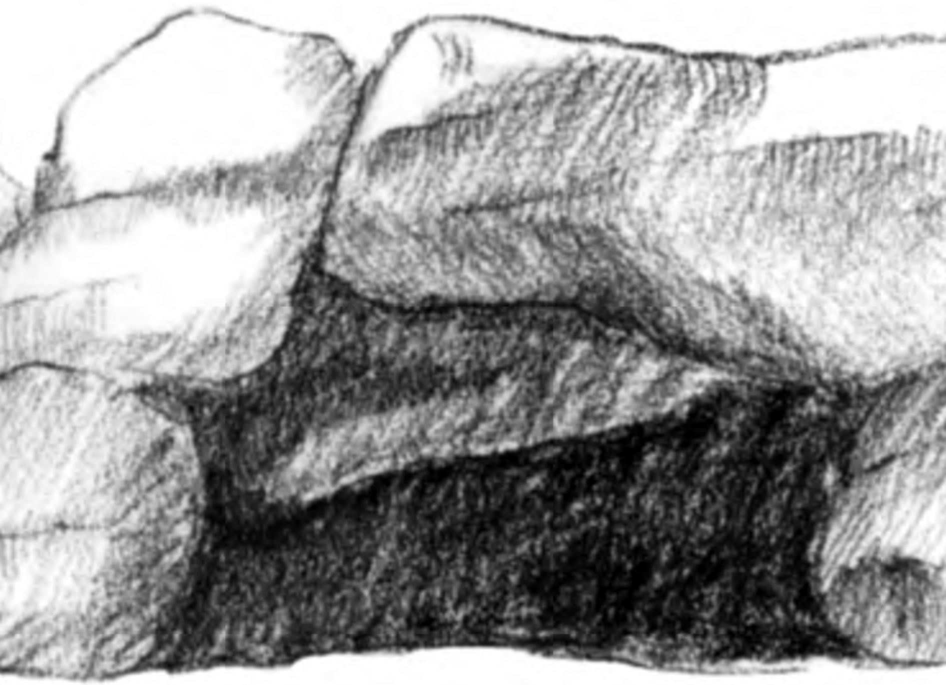
Б. Правильно. Сомневаюсь, чтобы по-настоящему оригинальные ученики могли бы выдержать такое учение долгое время.

А. Ну не знаю. Может быть, они достаточно оригинальны, чтобы найти способ полюбить эту систему. Погружение в предмет — так мы это называли. Так традиционные курсы можно сделать не такими невыносимыми, они могут даже понравится.

Б. Ты, как всегда, оптимистка. Боюсь, что ты рисуешь картину слишком розовыми красками. Смотри-ка, дождь закончился. Давай затащим этот камень в лагерь и прочтем, что здесь сказано.

Глава 8

СЛОЖЕНИЕ



А. Эти два куска подходят друг другу, похоже, что мы получили послание почти полностью. Что здесь говорится?

Б. Эта часть сложнее — есть несколько туманных слов. Думаю, что-то вроде этого:

> **...день. И сказал Конвей: «Да складываются числа друг с другом так: левое множество суммы двух чисел будет суммой всех левых частей каждого числа с другим; и точно так же правое множество да будет из правых частей каждого соответственно его виду.»**

Конвей доказал,что каждое число, сложенное с нулем, не изменяется. И увидел он, что сложение хорошо. И был вечер, и было утро — День Третий.

И сказал Конвей: «Да имеют множества отрицательного числа своими членами числа, противоположные членам множеств положительного числа; да будет вычитание сложением с отрицательным числом.» И было так. Конвей доказал, что вычитание противоположно сложению и это было хорошо. И был вечер, и было утро — День Четвертый.

И сказал Конвей числам: «Плодитесь и умножайтесь. Да будет часть одного числа умножена на другое и добавлена к произведению первого числа на часть другого и да вычтутся произведения частей. Да будет сделано это всеми возможными способами, давая число в левом множестве произведения, когда части одного вида, и в правом — когда разного.» Конвей доказал, что каждое число, умноженное на единицу, не изменяется. И был вечер, и было утро — День Пятый.

Се, когда числа были созданы в череде бесконечно многих дней, возникла Вселенная. И был вечер, и было утро — День ℵ.

И посмотрел Конвей на правила, которые он сделал для чисел, и увидел, что они были очень, очень хороши. И он повелел им быть для знаков, рядов, отношений и корней.

Затем возникло бесконечное число меньше, чем бесконечность. И бесконечности дней родили бесконечности множественных порядков.

Это все.

А. Какая странная концовка. А что такое «день алеф»?

Б. Ну, алеф — это буква еврейского алфавита, она здесь и стоит, смотри: ℵ. Похоже, она обозначает бесконечность.

Давай признаемся себе: это что-то трудное и будет не просто с этим разобраться.

А. Ты можешь все записать, пока я готовлю ужин? Слишком сложно все это держать в голове, а прочесть я не могу.

Б. Хорошо, так и мне станет чуточку яснее.

. . . .

А. Любопытно, что четыре числа, сотворенные в день третий, не упоминаются. Мне все же интересно, как Конвей их назвал.

Б. Может быть, если мы испытаем правила сложения и вычитания, мы разберемся, что это за числа.

А. Да, *если* мы только сможем понять эти правила сложения и вычитания. Давай попробуем записать правило сложения в символической форме, чтобы разобраться, что оно означает. ... Я думаю, что слова «соответственно его виду» означают, что левому соответствует левое, а правому — правое. Что ты думаешь насчет этого:

$$x + y = ((X_L + y) \cup (Y_L + x), (X_R + y) \cup (Y_R + x))? \qquad (3)$$

Б. Ужас. Что означает *твое* правило?

А. Чтобы получить левое множество числа $x + y$, ты берешь все числа вида $x_L + y$, где x_L содержится в X_L, а также все числа вида $y_L + x$, где y_L содержится в Y_L. Правое множество «точно так же» состоит из правых частей.

Б. Понимаю, «левая часть» x — это элемент множества X_L. Твое символьное определение кажется совместимым с тем, что изложено в прозе.

А. И кроме того, оно имеет смысл, потому что каждое из чисел $x_L + y$ и $y_L + x$ должно быть меньше $x + y$.

Б. Хорошо, мне хочется испытать это правило, посмотреть, как оно работает. Смотрю, ты назвала его правилом (3).

А. Теперь, после третьего дня, мы знаем, что есть семь чисел, мы можем назвать их 0, 1, -1, a, b, c и d.

Б. Нет, лучше мы воспользуемся симметрией левого и правого и рассмотрим числа

$$-a < -1 < -b < 0 < b < 1 < a,$$

где

$$-a = \boldsymbol{<:->} \qquad \boldsymbol{<|:>} = a$$

$$-1 = \boldsymbol{-} = \boldsymbol{<:\bullet>} \qquad \boldsymbol{<\bullet:>} = \boldsymbol{|} = 1$$

$$-b = \boldsymbol{<-:\bullet>} \qquad \boldsymbol{<\bullet:|>} = b$$

$$0 = \boldsymbol{<:>} = \bullet$$

А. Чудесно! Должно быть, ты прав, ведь следующее правило Конвея гласит вот что:

$$-x = (-X_R, -X_L). \tag{4}$$

Б. Вот оно! Ладно, мы можем начать эти числа складывать. Итак, что такое $1+1$ по правилу (3)?

А. Вот ты и сосчитай, а я посчитаю $1+a$.

Б. Хорошо, получается $(\{0+1, 0+1\}, \varnothing)$. Здесь $0+1$ — это $(\{0+0\}, \varnothing)$; $0+0$ — это $(\varnothing, \varnothing) = 0$. Все сходится, и получается, что $1+1 = (\{1\}, \varnothing) = a$. Как мы и думали, a должно быть двойкой.

А. Поздравляю, ты доказал, что $1+1 = 2$ самым длинным в мире способом.

Б. А ты знаешь доказательство короче?

А. На самом деле нет. Между прочим, твои вычисления мне помогут. Я получаю $1+2 = (\{2\}, \varnothing)$ — число, сотворенное только на четвертый день.

Б. Предлагаю назвать его «3».

А. Браво. Итак, правило (3) работает; давай убедимся, что b — это $\frac{1}{2}$, вычислив сумму $b+b\ldots$

Б. Странно, выходит $(\{b\}, \{b+1\})$ — а это число еще не сотворено.

А. При этом $b+1$ — это число $(\{b, 1\}, \{2\})$, которое похоже на $(\{1\}, \{2\})$, а оно сотворено на четвертый день. Так что $b+b$ появляется в день *пятый*.

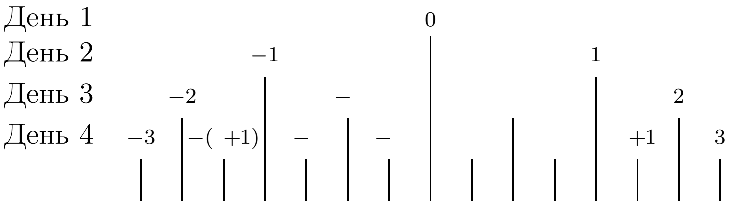
Б. Не говори только, что $b+b$ должно быть равно *другому* числу, имени которого мы еще не знаем.

А. Мы зашли в тупик?

Б. Мы разработали теорию, которая объясняет, как вычислить все сотворенные числа, так что мы должны быть в состоянии сделать это. Давай составим таблицу для первых четырех дней.

А. Билл, это слишком большая работа.

Б. Да нет же, здесь есть простая закономерность. Смотри:



А. Теперь ясно, $b + b$ — это число $(\{b\}, \{b + 1\})$, которое получается из *несоседних* чисел. . . , а наша теория говорит, что это — *сотворенное-раньше-всех* число между ними.

Б (*просияв*). Это же 1 — оно появилось раньше c.

А. Так что b — это все-таки $\frac{1}{2}$, хотя его численное значение выясняется только через два дня после создания. Удивительно, как много всего можно доказать, пользуясь столь немногими правилами; они так плотно пригнаны друг к другу — даже голова кругом идет.

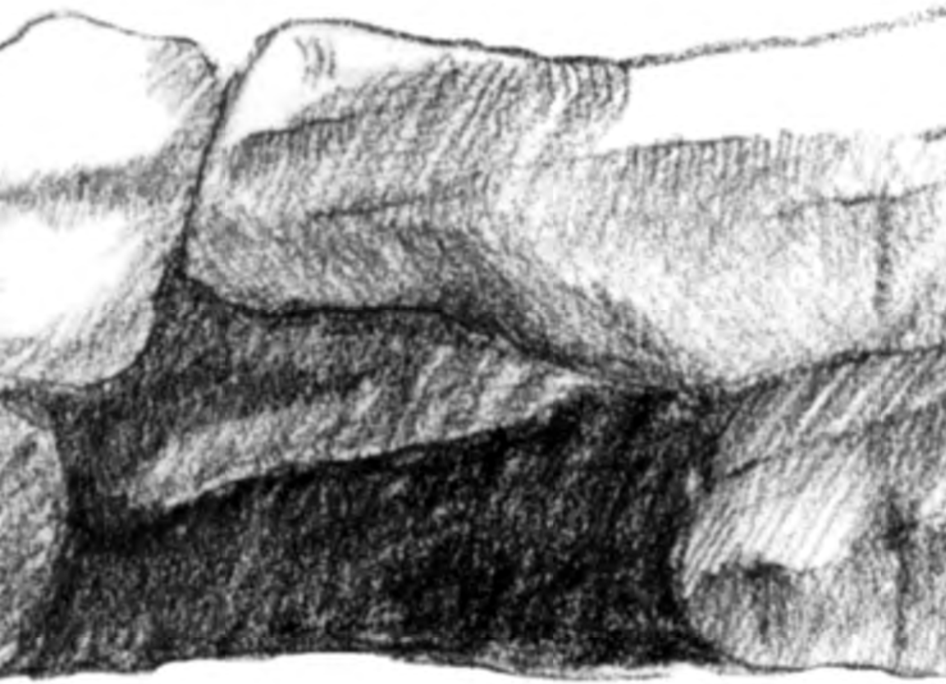
Б. Спорим, d — это $\frac{1}{3}$, а c — это $\frac{2}{3}$.

А. Да ведь солнце уже садится. Утро вечера мудренее, Билл, времени у нас впереди много, а я совершенно иссякла.

Б (*бубня под нос*). $d + c = \ldots$. Ладно, спокойной ночи.

Глава 9

ОТВЕТ



А. Ты уже не спишь?

Б. Ночь была ужасной. Я и сам ворочался, не переставая, и мысли в голове бегали по кругу. Мне снилось, что я что-то доказываю и делаю логические выводы, но когда проснулся, все они оказались неразумными.

А. Может быть, эта математика нам совсем не подходит. Еще вчера мы были счастливы, а теперь...

Б (*перебивая*). Да, вчера мы были сильны в математике, а сегодня все изменилось. Я не могу выбросить это из головы, мы *должны получить* больше результатов, иначе я никогда не засну. Куда же запропастился этот карандаш?

А. Билл, тебе нужно позавтракать. Есть абрикосы и фиги.

Б. Ладно, но потом сразу примемся за работу.

А. На самом деле мне тоже интересно этим заняться, однако пообещай мне одну вещь.

Б. Какую?

А. Сегодня мы разбираемся только со сложением и вычитанием; *никакого* умножения. Пока мы даже *смотреть* не будем на другую часть скрижали.

Б. Ладно. Я почти хочу отложить умножение надолго, оно выглядит ужасно сложным.

А (*целуя*). А теперь отдохни.

Б (*потягиваясь*). Ты так добра ко мне, Алиса.

А. Так-то лучше. Вечером я размышляла над тем, как ты решал задачу про все числа вчера утром. Думаю, это настолько важный принцип, что мы должны его записать в виде теоремы. Вот так:

> Если $y = (Y_L, Y_R)$ — произвольное число, а x — первое сотворенное число такое, что $Y_L < x$ и $x < Y_R$, то $x \equiv y$.

(T8)

Б. Гм... Думаю, что мы доказали именно это. Давай попробуем восстановить доказательство, пользуясь этими символами. Мы рассматривали число $z = (X_L \cup Y_L, X_R \cup Y_R)$, для которого по теореме (T7) выполнялось соотношение $x \equiv z$. С другой стороны, ни один элемент x_L множества X_L не удовлетворяет неравенству $Y_L < x_L$, поскольку x_L сотворено раньше x, а ведь мы считаем x самым ранним числом, удовлетворяющим неравенствам $Y_L < x$ и $x < Y_R$. Поэтому по теореме (T4) $x_L \leqslant y_L$ для каждого x_L и некоторого y_L. Так что $X_L < y$ и аналогично $y < X_R$. По теореме (T7) $y \equiv z$.

Теперь, когда мы вооружены средствами, доказательства получать довольно просто.

А. Что приятно, теорема (T8) значительно упрощает вычисления, которые мы делали вчера вечером. Когда мы вычисляли $b+b = (\{b\}, \{b+1\})$, мы могли сразу воспользоваться тем, что 1 — первое сотворенное число между $\{b\}$ и $\{b+1\}$.

Б. Давай-ка испытаем это на сумме $c + c$. Это должно быть первое сотворенное число между $b + c$ и $1 + c$. Значит, это $b + 1$, то есть $1\frac{1}{2}$; поэтому c — это $\frac{3}{4}$.

Вот так сюрприз. А я думал, это $\frac{2}{3}$.

А. А d — это $\frac{1}{4}$.

Б. Точно.

А. Я думаю, теперь ясна общая закономерность. После четырех дней сотворены такие положительные числа:

$$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3,$$

а после пяти дней, наверное, получатся такие:

Б (*перебивая*)

$$0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2, \frac{5}{2}, 3, 4.$$

А. Точно так. Доказать сможешь?

Б. ...

Да, но это будет не так просто, как кажется на первый взгляд. Например, чтобы найти значение $f = \left(\left\{\frac{3}{2}\right\}, \{2\}\right)$ (как оказалось, это $\frac{7}{2}$), я вычислял $f + f$. Это первое сотворенное число между 3 и 4, и мне пришлось «заглянуть в будущее», чтобы понять, что это $\frac{7}{2}$. Я уверен, что наша закономерность правильная, однако надо бы и доказательство получить.

А. На четвертый день мы вычислили $\frac{3}{2}$, зная, что это $1 + \frac{1}{2}$, а *не* вычисляя $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}$. Может быть, нам поможет сложение с единицей?

Б. Давай посмотрим... По определению, правилу (3),

$$1 + x = ((1 + X_L) \cup \{x\}, 1 + X_R),$$

при условии, что $0 + x = x$. На самом деле, не правда ли, что… конечно, для положительных чисел мы всегда можем выбрать X_L так, чтобы множество $1+X_L$ включало элемент $\geqslant x$, поэтому в этом случае все упрощается до

$$1 + x = (1 + X_L, 1 + X_R).$$

А. Билл, это то, что надо! Посмотри на последние восемь чисел пятого дня: все они на единицу больше чисел дня четвертого!

Б. В точку. Теперь нам осталось доказать, что найденная закономерность выполняется для чисел между 0 и 1…, а это всегда можно сделать, рассматривая числа $x + x$, которые меньше 2!

А. Да, теперь я уверена, что наша закономерность верна.

Б. Какое облегчение. Я могу обойтись без формального доказательства. Я *знаю*, что все верно.

А. Интересно, может ли наше правило для $1+x$ быть частным случаем более общего правила? Что-то вроде

$$y + x = (y + X_L, y + X_R)?$$

Это было бы проще, чем замудреное правило Конвея.

Б. Звучит логично, поскольку прибавление y должно «сдвигать» все на y единиц. Ан нет, возьмем $x = 1$. Тогда $y + 1$ должно быть $(\{y\}, \varnothing)$, а это не верно при $y = \frac{1}{2}$.

А. Жалко. Между прочим, твое правило для $1 + x$ тоже не работает при $x = 0$.

Б. Действительно, я доказал его только для положительных x.

А. Нам нужно внимательнее рассмотреть правило (3) — правило сложения — и понять, что можно доказать в общем виде. Все что у нас есть — это *названия* чисел. Эти названия должны быть верны, если числа Конвея ведут себя как настоящие числа, но мы не знаем, что правила Конвея это обеспечивают. Было бы здорово вывести целую кучу вещей из нескольких базовых правил.

Б. Давай посмотрим. Во-первых, очевидно, что для сложения выполняется свойство, которое мы бы назвали коммутативностью:

$$x + y = y + x. \tag{T9}$$

А. Правильно. Теперь давай докажем утверждение Конвея о том, что

$$x + 0 = x. \tag{T10}$$

Б. Правило гласит, что

$$x + 0 = (X_L + 0, X_R + 0).$$

Мы опять проводим индукцию по дню творения. Можно считать, что $X_L + 0$ совпадает с X_L, а $X_R + 0$ совпадает с X_R, поскольку все числа из этих множеств были сотворены раньше x. Что и требовалось доказать.

А. Но ведь мы доказали, что $x + 0 \equiv 0$, а не $= 0$?

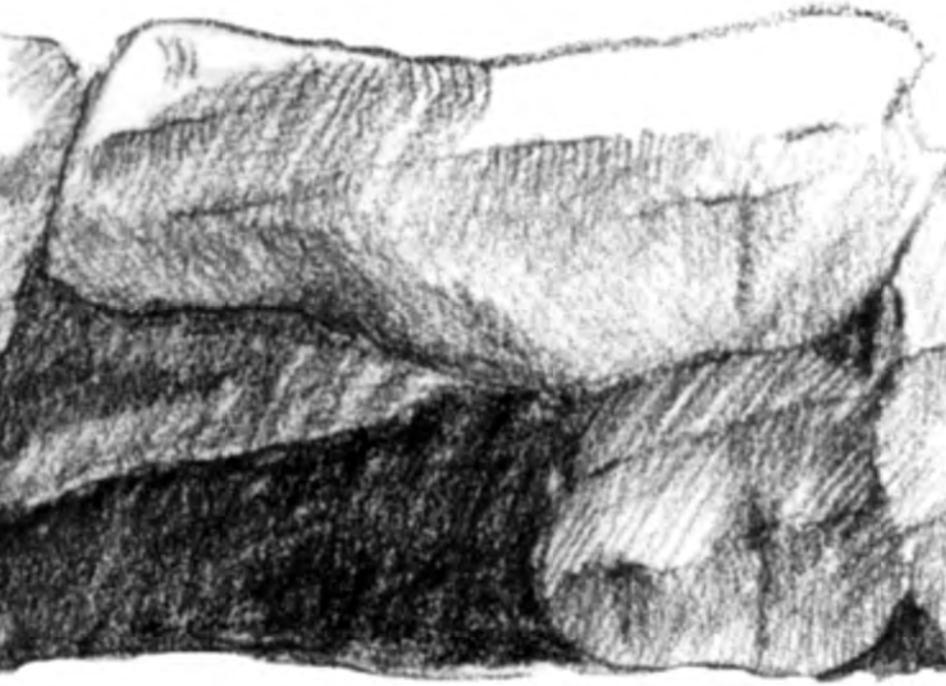
Б. Ну ты и зануда. Если хочешь, я заменю теорему (T10), на самом деле разницы нет никакой. Разве из доказательства не видно, что $x + 0$ представляет собой в точности ту же пару множеств, что и x?

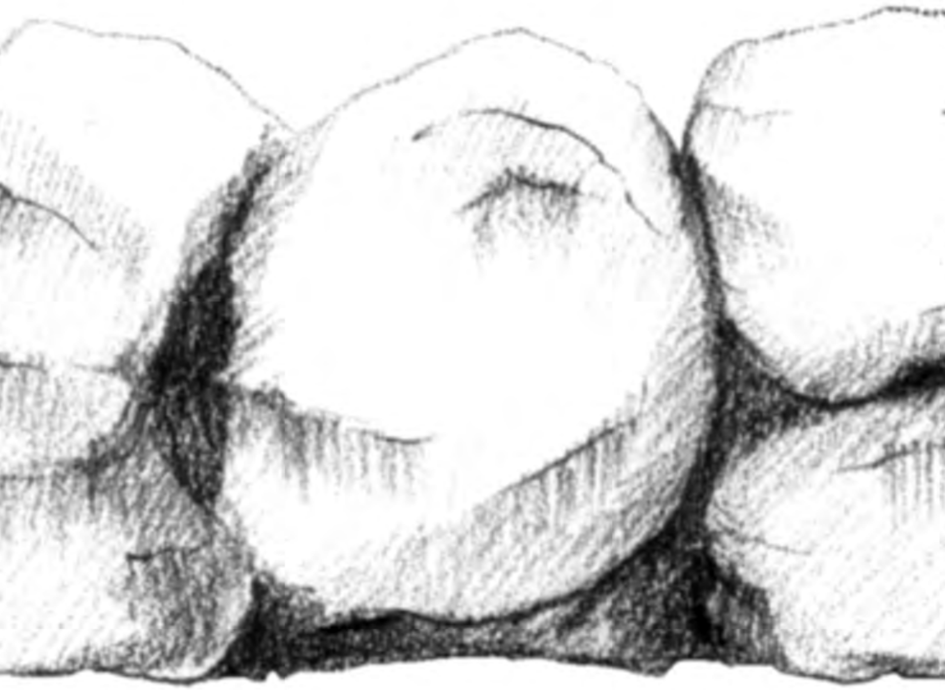
А. Прости меня еще раз. Ты прав.

Б. У нас уже десять теорем. Мы в ударе, может быть, еще что-нибудь попробуем?

Глава 10

ТЕОРЕМЫ





А. Как насчет ассоциативного закона:

$$(x + y) + z = x + (y + z)? \tag{T11}$$

Б. Вряд ли нам понадобится эта теорема; она не возникала в ходе вычислений. Но попробовать не вредно, и мои учителя математики считали, что она классная. Итак, ассоциативный закон выходит на сцену. Ты можешь предложить определение?

А. $$\begin{aligned}&(x+y)+z=\\&\quad=(((X_L+y)+z)\cup((Y_L+x)+z)\cup(Z_L+(x+y)),\\&\qquad((X_R+y)+z)\cup((Y_R+x)+z)\cup(Z_R+(x+y)));\\&x+(y+z)=\\&\quad=((X_L+(y+z))\cup((Y_L+z)+x)\cup((Z_L+y)+x),\\&\qquad(X_R+(y+z))\cup((Y_R+z)+x)\cup((Z_R+y)+x));\end{aligned}$$

Б. Здорово ты управляешься с этими сложнющими формулами. Но как можно доказать, что эти монстры равны?

А. Не так сложно, нужно только использовать сумму дней творения для элементов x, y, z, как мы это делали раньше. Смотри, $(X_L+y)+z = X_L+(y+z)$, так как у чисел x_L, y, z сумма дней творения меньше, чем у x, y, z, и можно по ней провести индукцию. То же самое нужно сделать для остальных пяти множеств, при этом в некоторых случаях прибегнуть к коммутативному закону.

Б. Мои поздравления! Снова Ч. Т. Д., и снова доказательство отношения $=$ вместо $\equiv$.

А. На этот раз $\equiv$ меня немного беспокоит. Мы показали, что можем заменять похожие элементы на похожие элементы относительно $<$ и $\leqslant$, но разве мы не должны проверить такую возможность для сложения? Я имею в виду, разве мы не должны убедиться, что

$$\text{если}\quad x\equiv y,\quad\text{то}\quad x+z\equiv y+z? \tag{T12}$$

Б. Думаю, что должны. В противном случае мы, строго говоря, не имеем права делать те упрощения, что делали, когда давали имена числам. Раз уж мы доказываем, давай доказывать строго.

А. На самом деле мы можем доказать еще более строгое утверждение:

$$\text{если}\quad x\leqslant y,\quad\text{то}\quad x+z\leqslant y+z. \tag{T13}$$

Отсюда (T12) будет следовать сразу же.

Б. Разумеется, ведь $x\equiv y$ выполняется тогда и только тогда, когда $x\leqslant y$ и $y\leqslant x$. И потом, теорема (T13) может быть полезна сама по себе. А может быть, мы должны доказать еще более сильное утверждение:

$$\text{если}\quad x\leqslant y\quad\text{и}\quad w<z,\quad\text{то}\quad x+w\leqslant y+z?$$

А. Да нет, оно же следует из (T13), ведь $x + w \leqslant y + w = w + y \leqslant z + y = y + z$.

Б. Это хорошо, потому что (T13) проще. Ну что, эксперт по формулам, чему эквивалентна теорема (T13)?

А. Мы должны доказать, что если $X_L < y$ и $x < Y_R$, то $X_L + z < y + z$, $Z_L + z < y + z$, $x + z < Y_R + z$ и $x + z < Z_R + y$.

Б. Опять индукция по сумме дней творения? Как-то все слишком просто.

А. В этот раз не все так просто. Боюсь, что индукция даст нам лишь $X_L + z \leqslant y + z$ и так далее. Может случиться так, что $x_L < y$, но $x_L + z \equiv y + z$.

Б. И правда. Это интересно. Нам здесь нужно обратное утверждение:

$$\text{если} \quad x + z \leqslant y + z, \quad \text{то} \quad x \leqslant y. \tag{T14}$$

А. Прекрасно! Это обратное утверждение можно сформулировать так. Пусть $X_L + z < y + z$, $Z_L + z < y + z$, $x + z < Y_R + z$ и $x + z < Z_R + y$, тогда $X_L < y$ и $x < Y_R$.

Б. Гм... Обратное можно было бы доказать по индукции, за исключением одного случая. Может ведь оказаться, что, скажем, $x_L + z < y + z$, но $x_L \equiv y$. Конечно, теорема (T13) исключает такую возможность, но...

А. Но нам нужна теорема (T13), чтобы доказать (T14), а (T14) — чтобы доказать (T13). И еще (T13), чтобы доказать (T12).

Б. Мы опять ходим по кругу.

А. Но в этот раз мы можем из него вырваться — мы докажем их одновременно! Мы докажем комбинированное утверждение «(T13) и (T14)» индукцией по сумме дней творения (x, y, z)!

Б (*просияв*). Алиса, ты гений! Прекраснейший и соблазнительный гений!

А. Не так быстро, нам все же предстоит кое-что сделать. Нужно доказать, что

$$x - x \equiv 0. \tag{T15}$$

Б. Что это за минус? Мы никогда не записывали законов Конвея для вычитания.

A. $$x - y = x + (-y). \tag{5}$$

Б. Я заметил, что ты поставила $\equiv$ в теореме (T15). Ясно, что $x + (-x)$ не будет тождественно равно нулю — числу с пустыми левым и правым множествами, — если только x не есть 0.

А. Правила (3), (4) и (5) говорят, что теорема (T15) эквивалентна вот чему:

$$\Big((X_L + (-x)) \cup ((-X_R) + x),$$
$$(X_R + (-x)) \cup ((-X_L) + x)\Big) \equiv 0.$$

Б. Выглядит неаппетитно. В любом случае, как можно показать, что что-то тождественно равно 0? ... По теореме (T8) $y \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $Y_L < 0$ и $0 < Y_R$, поскольку 0 — самое первое сотворенное число.

А. То же утверждение следует из правила (2); то есть $y \leqslant 0$ тогда и только тогда, когда $Y_L < 0$, и $0 \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $0 < Y_R$. Поэтому мы должны доказать только, что

$$\begin{array}{cccc} & x_L + (-x) < 0 & \text{и} & (-x_R) + x < 0 \\ \text{и} & x_R + (-x) > 0 & \text{и} & (-x_L) + x > 0 \end{array}$$

для всех x_L из XX_L и x_R из X_R.

А. Да, ведь мы можем доказывать теорему (T15) по индукции.

Б. Тогда все получается! Если бы $x_L + (-x)$ было $\geqslant 0$, то $(-X)_R + x_L > 0$ по определению. Но $(-X)_R$ — это множество $-(X_L)$, оно содержит элемент $-x_L$, а $(-x_L) + x_L$ не больше 0. Поэтому сумма $x_L + (-x)$ должна быть меньше 0, причем этот метод доказательства годится и для остальных случаев.

А. Браво! Это доказывает (T15).

Б. Что следующее на очереди?

А. Как насчет такой теоремы:

$$-(-x) = x. \tag{T16}$$

Б. Это тривиально. Следующие?

А. Мне в голову приходит только теорема Конвея

$$(x+y)-y \equiv x. \tag{T17}$$

Б. А чему это эквивалентно?

А. Тут такая путаница... Можем мы строить доказательства, не обращаясь каждый раз к определениям?

Б. Да это получается, можно сказать, само собой:

$$\begin{aligned} (x+y)-y &= (x+y)+(-y) && \text{согласно (5)} \\ &= x+(y+(-y)) && \text{согласно (T11)} \\ &= x+(y-y) && \text{согласно (5)} \\ &= x+0 && \text{согласно (T12) и (T15)} \\ &= x && \text{согласно (T10).} \end{aligned}$$

Мы получили много полезных результатов — даже ассоциативный закон пригодился. Спасибо, что ты его предложила, невзирая на мои возражения.

А. Так, похоже, что мы исчерпали возможности сложения, противоположных чисел и вычитания. Есть еще пара утверждений, которые мы могли бы доказать, что-то вроде

$$-(x+y) = (-x)+(-y); \tag{T18}$$

$$\text{если } x \leqslant y, \quad \text{то } -y \leqslant -x, \tag{T19}$$

но по-моему, они не содержат никаких новых идей, так что нет особого смысла их доказывать, особенно если мы не собираемся ими пользоваться.

Б. Девятнадцать теорем, и все получились из небольшого числа довольно-то примитивных правил.

А. А теперь ты должен вспомнить свое обещание: сегодня после обеда у нас никакой математики, мы даже не смотрим на Камень. Я не хочу, чтобы это ужасное умножение лишило тебя сна.

Б. Сегодня мы славно поработали — все задачи решены. Смотри, опять прилив. Ладно, кто последний добежит до воды, тот готовит ужин!

Глава 11

ПРЕДЛОЖЕНИЕ

А. Ужин был просто супер.

Б (*ложась рядом*). Это все потому, что ты наловила свежей рыбы.

О чем ты сейчас думаешь?

А (*краснея*). Ну, задумалась вот — что будет, если я забеременею.

Б. Ты думаешь, раз мы здесь, в районе Благодатного Полумесяца[1], и ...

А. Очень смешно. А после всех наших трудов по доказательству равенства $1+1=2$ мы сделаем открытие, что $1+1=3$.

Б. Ладно, твоя взяла, шутки в сторону. Но ты только подумай, правила Конвея для множеств — как акт соития. В смысле левое множество встречается с правым...

А. У тебя на уме только одно — ладно, и еще одно. Но если серьезно — что бы мы сделали, если я бы действительно забеременела?

Б. Думаю, нам так и этак в скором времени придется возвращаться домой; деньги на исходе, и погода становится все хуже.

В любом случае, я очень хочу жениться на тебе, беременна ты или нет. Если ты согласна, конечно же.

А. Я чувствую то же самое. Это путешествие доказало, что мы готовы к постоянным отношениям.

Интересно... Когда наши дети подрастут, мы их научим нашей теории чисел?

Б. Нет, им будет интереснее, если они сами ее откроют.

А. Но люди не могут сами открывать *все*; должен быть какой-то баланс.

Б. А разве обучение — это не процесс самостоятельного познания? Разве лучшие учителя не помогают ученикам думать самостоятельно?

А. В каком-то смысле это так. Что-то мы ударились в философию.

Б. Я никак не могу поверить, как здорово я себя чувствовал, когда занимался этой сумасшедшей математикой; она меня по-настоящему заводит, хотя я и ненавидел ее прежде.

А. Мне тоже понравилось. Я думаю, это лучше наркотиков; в том смысле, что мозг может стимулировать сам себя естественным образом.

---

[1] Благодатный Полумесяц — условное название региона на Ближнем Востоке, в котором в зимние месяцы наблюдается повышенное количество осадков. Местность была так названа из-за ее богатой почвы и формы, напоминающей полумесяц. — *Прим. перев.*

Б. И к тому же математика — это еще и афродизиак.

А (*любуясь звездами*). У чистой математики есть одна прекрасная особенность: то, что мы сегодня доказали, — совершенно бесполезная вещь, и никто не использует это, чтобы делать бомбы или еще что-то в этом роде.

Б. Правильно. Но мы ведь не можем все время просидеть в башне из слоновой кости. В мире много проблем, и математика может помочь с ними справиться. Ты знаешь, мы так долго обходились без газет, что позабыли о всех проблемах.

А. Иногда я даже чувствую себя виноватой...

Может быть, подходящая область математики и помогла бы решить эти проблемы, но меня беспокоит, что она может быть использована в дурных целях.

Б. Это парадокс и дилемма. Ничего нельзя добиться без подходящих инструментов, но инструменты могут быть использованы как во благо, так и во зло. Если мы прекратим творить новое, чтобы оно не попало в дурные руки, то прекратим создавать и полезные вещи.

А. Ладно. Я согласна, что чистая математика не дает ответа на все вопросы. Но разве ты готов совсем отказаться от нее только потому, что она не решает мировых проблем?

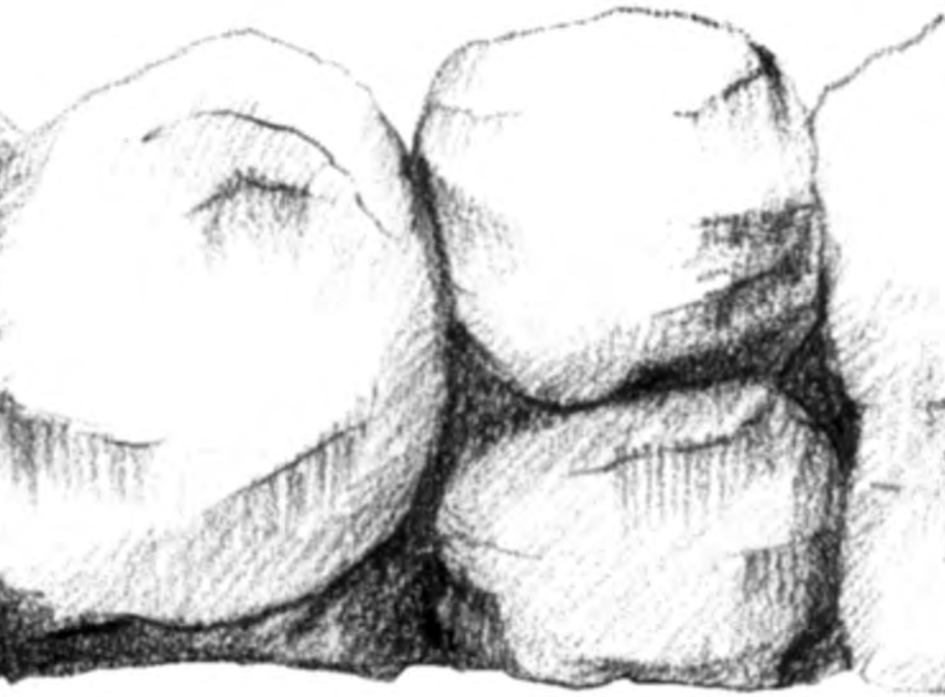
Б. Нет, пойми меня правильно. Эти несколько дней убедили меня, что чистая математика прекрасна — это вид искусства, как поэзия, живопись или музыка; она нас заводит. Наше естественное любопытство должно быть удовлетворено. Мы бы не выжили, если бы у нас не было хоть капли радости, даже во времена невзгод и несчастий.

А. Билл, как мне нравится говорить с тобой так.

Б. Мне тоже. Я чувствую близость с тобой и мир в душе.

Глава 12

КАТАСТРОФА



Б. Ты уже проснулась?

А. Еще час тому назад, и сразу поняла, что в нашем вчерашнем доказательстве есть большой, просто огромный пробел.

Б. Нет!

А. Боюсь, что все-таки да. Мы забыли доказать, что $x + y$ — это и в самом деле *число*.

Б. Ты что, издеваешься? Конечно, это число, это же сумма двух чисел! Погоди-ка... Мы должны убедиться, что выполняется правило (1).

А. Да, определение сложения не действительно, пока мы не докажем, что $X_L + y < X_R + y$, $X_L + y < Y_R + x$, $Y_L + x < X_R + y$ и $Y_L + x < Y_R + x$.

Б. Это могло бы следовать из теорем (T13) и (T14), но... Теперь я тебя понимаю, мы доказали эти теоремы в предположении, что сумма двух чисел — это число. Как тебе вообще в голову пришла эта мысль?

А. О, это довольно интересно. Я пыталась понять, что было бы, если определить сложение как-то так:

$$x \oplus y = (X_L \oplus Y_L, X_R \oplus Y_R).$$

Я поставила знак $\oplus$, потому что вообще-то не ясно, что это та же операция, что и $+$. Довольно легко понять, что $\oplus$ — коммутативная и ассоциативная операция, так что мне стало интересно, что она из себя представляет.

Б. Да, действительно; сумма x и y лежит между $X_L + Y_L$ и $X_R + Y_R$, поэтому новое определение могло оказаться проще Конвеевского.

А. Но мои надежды скоро рассеялись, когда я обнаружила, что

$$0 \oplus x = 0$$

для всех x.

Б. Упс! Может быть, $\oplus$ означает умножение?

А. Потом я доказала, что $1 \oplus x = 1$ для всех $x > 0$, что $2 \oplus x = 2$ для всех $x > 1$, $3 \oplus x = 3$ для всех $x > 2$,...

Б. Ясно. Для всех положительных целых чисел m и n результат операции $m \oplus n$ — это *минимум* из m и n. Эта операция коммутативна и ассоциативна, все правильно. Так что твоя операция *действительно* оказалась интересной.

А. Ну да, и к тому же $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Но затем я рассмотрела выражение $\left(-\frac{1}{2}\right) \oplus \frac{1}{2}$ и была вконец обескуражена.

Б. То есть? А, ну да: $\left(-\frac{1}{2}\right) \oplus \frac{1}{2} = (\{(-1) \oplus 0\}, \{0 \oplus 1\})$, а это все равно что $(\{0\}, \{0\})$.

А. А ведь это *не* число. Это против правила (1).

Б. Так что твое определение $\oplus$ незаконно.

А. Тут-то я и поняла, что нельзя давать определения как вздумается; они должны быть совместимы с правилами. Кроме того, с операцией $\oplus$ была еще одна проблема. Например, $(\{-1\}, \varnothing) \equiv 0$, однако $(\{-1\}, \varnothing) \oplus 1 \not\equiv 0 \oplus 1$.

Б. Ладно, отбросим $\oplus$, однако я считаю, что мы сможем уточнить *настоящее* определение $+$.

А. Не уверена. Я рассказала тебе все, что знаю. За исключением моих соображений о *псевдочислах.*

Б. Псевдочислах?

А. Допустим, мы возьмем пару (X_L, X_R), где X_L не обязательно меньше X_R. Тогда правило (2) все равно позволит определить отношение $\leqslant$ между такими псевдочислами.

Б. Понимаю... так $(\{1\}, \{0\})$ оказывается меньше 2.

А. Точно. И я только что заметила, что наше доказательство транзитивного закона (T1) не использует ту часть правила (1), которая относится к отношению $\not\geqslant$, так что закон выполняется и для псевдочисел.

Б. Да, помнится, мы говорили, что правило (1) не использовалось до теоремы (T2). Как это было давно.

А. А теперь — внимание, фокус! Псевдочисло $(\{1\}, \{0\})$ не больше 0 и не меньше!

Б. Ничего себе!

А. Да, я думаю, мы можем доказать, что $(\{1\}, \{0\})$ не больше числа y тогда и только тогда, когда $y > 1$; и не меньше числа x тогда и только тогда, когда $x < 0$. Оно никак не соотносится с числами между 0 и 1.

Б. Где карандаш? Нужно все это проверить... Думаю, ты права. Забавно, мы доказываем утверждения про величины, которые даже не существуют.

А. Что ж, можно ли сказать, что псевдочисла существуют в меньшей степени, нежели числа Конвея? Твои слова надо понимать так, что мы доказываем утверждения о величинах чисто умозрительных, не имеющих соответствий в реальном мире, которые бы облегчили понимание... Вспомни, что $\sqrt{-1}$ раньше тоже считалось «мнимым числом», а $\sqrt{2}$ даже не было «рациональным».

Б. Правило Конвея для сложения обычных чисел позволяет нам складывать и псевдочисла тоже. К чему это может привести? Если $x = (\{1\}, \{0\})$, то $1 + x$ — это... $(\{2\}, \{1\})$.

А. А $x + x$ — это $(\{1 + x\}, \{x\})$, псевдочисло второго порядка.

Б. Чистая математика здорово прочищает мозги. А ты замечаешь, что псевдочисло $(\{1\}, \{0\})$ даже не меньше или равно себе самому?

А. Давай-ка посмотрим; $x \leqslant x$ означает, что $X_L < x < X_R$, а это соотношение может выполняться только если $X_L < X_R$.

А нет, нам же нельзя для псевдочисел заменять знак $<$ на $\ngeqslant$, ведь теорема (T4), вообще говоря, для них не верна. Мы должны обратиться к исходному правилу (2), которое гласит, что $x \leqslant x$, если и только если $X_L \ngeqslant x$ и $x \ngeqslant X_R$. Так что *на самом деле* $(\{1\}, \{0\})$ больше или равно себе.

Б. *Touché!* Хорошо, что я ошибся, поскольку каждое x должно быть похоже на себя, даже если это псевдочисло.

А. Может быть, существует более сложное псевдочисло, о котором нельзя сказать, что оно больше или равно себе. Мне сложно это представить, потому что множества X_L и X_R могут включать и псевдочисла.

Б. Давай вернемся к доказательству теоремы (T3) и посмотрим, работает ли оно.

А. Хорошая мысль... Да, то же самое доказательство годится и для псевдочисел: x всегда похоже на x.

Б. Здорово, но я боюсь, это уводит нас в сторону от главного вопроса: вполне ли определена операция $=$.

А. Что ж, наше доказательство того, что $x + y = y + x$ и $x + 0 = x$ годится не только для чисел, но и для псевдочисел, то же самое можно сказать о доказательстве ассоциативного закона. Если теоремы о неравенствах

(T13) и (T14) тоже верны для псевдочисел, то операция $=$ определена вполне.

Б. Как же это красиво! Для псевдочисел мы уже установили теоремы (T1), (T3), (T5), (T6), (T10) и (T11). Давай вернемся к (T13).

А. Я все же боюсь, что .... Ах, Билл, мы вчера так простодушно приняли доказательство теорем (T13) и (T14) по индукции по сумме дней творения; это было слишком хорошо, чтобы быть правдой.

Б. Что ты имеешь в виду?

А. Мы же доказывали по индукции, что $Z_L + x < y + z$, правильно? Для этого потребовалось два шага: $Z_L+x \leqslant Z_L+y$, а затем $Z_L+y < z+y$. Первую часть индукция, конечно же, обеспечивает, но во вторую часть входит тройка (z_L, z, y), а у нее сумма дней творения может быть *больше*, чем у (x, y, z).

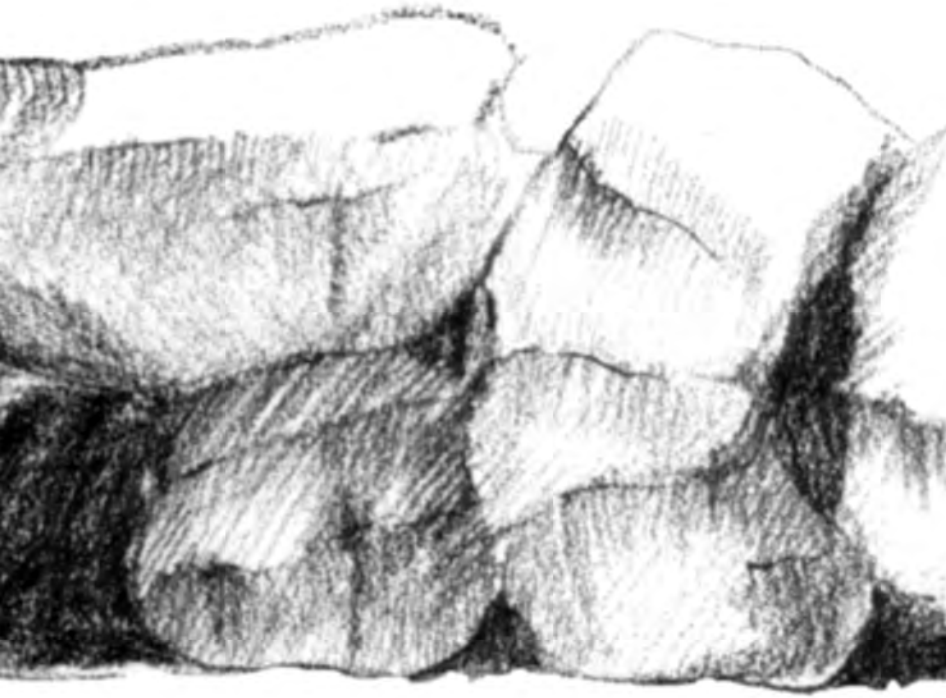
Б. Похоже, мы все профукали. Конвею было бы стыдно за нас.

А. Хорошо, что мы не заметили это вчера, а то бы весь день был бы испорчен.

Б. Похоже, нужно все начинать сначала... но нам все-таки *надо* позавтракать.

Глава 13

ВЫЗДОРОВЛЕНИЕ



А. Мы пропустили обед, Билл.

Б (*шагая взад-вперед*). Да? Эта дурацкая задача выводит меня из себя.

А. Но пялиться в эту бумажку нет никакого толку. Нам нужно прерваться; может быть, если бы мы перекусили,. . .

Б. На самом-то деле нам нужна новая идея. Подбрось мне идею, Алиса.

А (*принимаясь за еду*). Вот когда мы до этого ходили по кругу, как нам удалось вырваться? Тогда главное было —

воспользоваться индукцией. Нужно было показать, что доказательство одного случая опирается на истинность предыдущего случая, того — на истинность предшествующего, и так далее, пока эта веревочка не размотается до конца.

Б. Как наше рассуждение о днях творения.

А. Точно. Другой путь, ведущий из круга, — доказать больше того, что нам было надо. Чтобы включить индукцию, нам пришлось доказывать одновременно несколько вещей.

Б. Да, когда мы сочетали (T13) и (T14). Хорошо, Алиса. После обеда я сяду и набросаю общую картину: все, что нам надо доказать и даже больше. И я собираюсь попробовать доказать все одновременно по индукции. Испытанный подход — прямо в лоб. Если он не сработает, ничто больше уже не поможет.

А. Нельзя сказать, что звучит заманчиво, но, возможно, это лучший путь. Скушай овсяное печеньице.

. . . .

Б. Итак, приступим. Мы хотим доказать три вещи о числах, и все они, похоже, взаимозависимы.

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(x,y)&: \quad x+y\text{ — число.}\\ \mathrm{II}(x,y,z)&: \quad \text{если } x\leqslant y,\text{ то } x+z\leqslant y+z.\\ \mathrm{III}(x,y,z)&: \quad \text{если } x+z\leqslant y+z,\text{ то } x\leqslant y.\end{aligned}$$

Если я не ошибаюсь, утверждение $\mathrm{I}(x,y)$ будет доказано, если мы вначале докажем утверждения

$$\begin{array}{llll} \mathrm{I}(X_L,y), & \mathrm{I}(x,Y_L), & \mathrm{I}(X_R,y), & \mathrm{I}(x,Y_R),\\ \mathrm{III}(X_R,X_L,y), & & & \\ \mathrm{III}(x,X_L,y), & \mathrm{II}(y,Y_R,x), & & \\ \mathrm{III}(y,Y_L,x), & \mathrm{II}(x,X_R,y), & & \\ \mathrm{III}(Y_R,Y_L,x). & & & \end{array}$$

Например, среди прочего нам надо доказать, что $X_L + y < Y_R + x$. Иначе говоря, для всех x_L из множества X_L и всех y_R из множества Y_R мы предварительно должны установить, что $x_L + y < y_R + x$. Но из $\mathrm{III}(x, x_L, y)$ и (T13) следует, что $x_L + y < x + y$, а из $\mathrm{II}(y, y_R, x)$ — что $y + x \leqslant y_R + x$. Так?

А. Вроде так. Только мне непонятно, зачем ты включил в список первую четверку, от $\mathrm{I}(X_L, y)$ до $\mathrm{I}(x, Y_R)$. Ведь даже если бы $x_L + y$ не было числом, это не играло бы роли; нам достаточно знать, что x_L и y — числа. В конце концов, отношения $<$ и $\leqslant$ определены для псевдочисел, и транзитивный закон для них тоже выполняется.

Б. Нет, правило (1) гласит, что элементы левой части вида $x_L + y$ тоже должны быть числами. В любом случае это не имеет большого значения — раз уж мы доказываем $\mathrm{I}(x, y)$, то можем считать справедливым $\mathrm{I}(x_L, y)$ и так далее, об этом заботится индукция.

А. Как-то это сложновато, но ты все-таки продолжай, звучит многообещающе.

Б. Этот подход *должен* сработать, иначе будет катастрофа. Ладно, утверждение $\mathrm{II}(x, y, z)$, а именно (Т13), будет доказано, если мы предварительно установим, что

$$\begin{array}{ll} \mathrm{III}(y, X_L, z), & \\ \mathrm{II}(x, y, Z_L), & \mathrm{III}(z, Z_L, y), \\ \mathrm{III}(Y_R, x, z), & \\ \mathrm{II}(x, y, Z_R), & \mathrm{III}(Z_R, z, x). \end{array}$$

Это любопытно — здесь нам не потребовалось утверждение $\mathrm{I}(x, y)$. Как это нам в голову пришло доказывать, что сумма двух чисел — это число, еще прежде теоремы (Т13)?

А. Это же было до того, как мы ближе познакомились с псевдочислами. Поразительно, как одна отдельно взятая идея может заблокировать мышление!

Помнишь? Мы с самого начала говорили, что будет трудно доказать, что $x + y$ — это число, поскольку считали, что теорема (Т13) на это опирается. А после того, как мы узнали, что псевдочисла подчиняются транзитивному закону, мы забыли пересмотреть исходный источник трудностей.

Б. По крайней мере этот метод панорамного изображения куда-нибудь нас да приведет; хотя бы потому, что помогает организовывать мысли.

Итак, с двумя справились, и на подходе еще одно утверждение. Доказательство $\mathrm{III}(x, y, z)$ опирается на

$$\mathrm{II}(y, X_L, z),$$
$$\mathrm{II}(Y_R, x, z).$$

А. И здесь тоже $\mathrm{I}(x, y)$ не потребовалось. Значит, мы можем доказать теоремы (T13) и (T14), не беспокоясь о том, является сумма $x + y$ числом или нет.

Б. Понимаю; а потом выяснится, что $x + y$ — все-таки число, и именно в силу теорем (T13) и (T14). Здорово!

А. Видно, II и III взаимозависимы, так что мы можем скомбинировать их в одно утверждение, как мы раньше это делали.

Б. Это важный момент. Я обозначу через $\mathrm{IV}(x, y, z)$ комбинированное утверждение «$\mathrm{II}(x, y, z)$ и $\mathrm{III}(x, y, z)$». Мой список показывает, что оно опирается на

$$\mathrm{IV}(y, X_L, z),\ \mathrm{IV}(x, y, Z_L),\ \mathrm{IV}(z, Z_L, y),$$
$$\mathrm{IV}(Y_R, x, z),\ \mathrm{IV}(x, y, Z_R),\ \mathrm{IV}(Z_R, z, x).$$

Новые обозначения вроде $\mathrm{I}(x, y)$ оказались очень полезными, потому что они проясняют существующие закономерности. Теперь нам осталось только сконструировать индуктивное предположение, которое ведет от этих шести утверждений к $\mathrm{IV}(x, y, z)$.

А. Нетушки, это не работает. Смотри, $\mathrm{IV}(x, y, z)$ опирается на $\mathrm{IV}(z, z_L, y)$, которое опирается на $\mathrm{IV}(y_R, y, z)$, а оно снова опирается на $\mathrm{IV}(z, z_L, y)$ — мы зациклились. Эта все та же идиотская загвоздка, о которой я говорила раньше, и теперь мы понимаем, что она критична.

Б (*пиная землю*). *Ну нет*! ... Что ж, прежде чем сдаться, я попробую последнее средство. Пройду по этому пути до конца и докажу более общую версию теоремы (T13):

$$\mathrm{V}(x, x', y, y')\text{: если } x \leqslant x' \text{ и } y \leqslant y', \text{ то } x + y \leqslant x' + y'.$$

Ведь в наших доказательствах мы пользуемся именно этим свойством, а не применяем дважды теорему (T13). А новое утверждение симметрично; вдруг это поможет.

А. Тогда нам понадобится его обращение, обобщенная теорема (T14).

Б. Обозначу ее $\mathrm{VI}(x, x', y, y')$; она должна выглядеть так:

$$\text{если } x + y \geqslant x' + y' \text{ и } y \leqslant y' \text{ то } x \geqslant x'.$$

А. Твои обозначения, штрихи и все такое, выглядят очень профессионально.

Б (*сосредоточенно*). Спасибо. Теперь доказательство $\mathrm{V}(x, x', y, y')$ опирается на

$$\mathrm{VI}(X_L, x', y, y'),$$
$$\mathrm{VI}(Y_L, y', x, x'),$$
$$\mathrm{VI}(x, X'_R, y, y'),$$
$$\mathrm{VI}(y, Y'_R, x, x').$$

Ого, это действительно проще, чем раньше, симметрия помогает. Наконец, чтобы доказать $\mathrm{VI}(x, x', y, y')$, мы должны опираться на... напряжение просто убивает меня, я думать не могу...

$$\mathrm{V}(x, X'_L, y, y'),\ \mathrm{V}(X_R, x', y, y').$$

А (*подпрыгнув*). Смотри, доказательство по сумме дней творения, примененное к комбинации V и VI, завершает индукцию!

Б (*обнимая ее*). Мы победили!

А. Билл, мне даже не верится, наше доказательство этих двух утверждений годится и для всех *псевдочисел* x, x', y и y'.

Б. Алиса, это было тяжело, но это прекраснее всего, что я видел раньше.

А. Да, мы потратили кучу энергии на то, что вчера нам казалось ясным и так.

Интересно, а сам Конвей знал для этих законов какие-то доказательства попроще? Может быть и да, но мне все равно нравится наше, потому что оно научило нас стольким полезным приемам.

Б. Сегодня мы собирались изучать умножение.

А. Лучше пока отложим, а то нам опять будет грозить бессонница. Вместо этого лучше докажем, что если x — число, то $-x$ — тоже.

Б. Хорошая идея, теперь это будет уже несложно. Интересно, сможем мы понять, как могут быть устроены отрицательные псевдочисла?

Глава 14

ВСЕЛЕННАЯ

Б (*потягиваясь*). Доброе утро, любовь моя. Нашла ли ты этой ночью еще какие-нибудь ошибки в наших математических рассуждениях?

А. Нет, а ты?

Б. Ты же знаешь, я никогда не ищу ошибок. Но мне пришла в голову такая мысль: мы считали, что у нас есть правила для создания всех чисел, но на самом деле число $\frac{1}{3}$ так и не возникло. Вспомни, я ждал его появления на четвертый день, но тогдашнее число оказалось $\frac{1}{4}$. Я тогда еще подумал, что ж, число $\frac{1}{3}$ никуда не торопится, но рано или поздно мы его все равно встретим. И вот только что я сообразил, что мы проанализировали все числа, а $\frac{1}{3}$ среди них не было.

А. Все сотворенные числа имеют конечную запись в двоичной системе счисления. Например, $3\frac{5}{8}$ в двоичной системе записывается как 11.101. С другой стороны, каждое число с конечной двоичной записью когда-нибудь да будет сотворено. То же $3\frac{5}{8}$ появилось на … восьмой день.

Б. Двоичное представление используется в компьютерах. Может быть, Конвей творил компьютеризованный мир?

Кстати, а *как* число $\frac{1}{3}$ записывается в двоичной системе?

А. Не знаю, но ведь должно же оно как-то записываться?

Б. Что-то такое я припоминаю. Вроде ты делишь столбиком, но только в двоичной системе, а не в десятичной. Стой-ка… Получается

$$\frac{1}{3} = .010101010101\ldots$$

и так до бесконечности. У этой записи нет конца, вот поэтому это число и не было сотворено.

А. «До бесконечности». Это мне напомнило последнюю часть скрижали. Как ты думаешь, как надо понимать все эти разговоры об $\aleph$ и тому подобном?

Б. Мне это напоминает какое-то метафизическое или религиозное восхваление системы чисел. Типично для древних текстов. С другой стороны, странно, что Конвей все еще здесь и говорит, спустя бесконечно много дней. «До конца времени», но ведь время еще не закончилось.

А. Ты сегодня в ударе.

Б. Думаю, что после бесконечно многих дней Конвей посмотрел на все эти двоичные числа, что он сотворил, и… Спорим, он не остановился.

А. Конечно! Я никогда об этом не думала, но похоже, Камень гласит, что он продолжил. И… я уверена, он получает все больше и больше чисел, ведь теперь в качестве X_L и X_R он может брать *бесконечные* множества.

Б. Может быть, время не течет с постоянной скоростью. Может быть, нам кажется, что все дни одинаковой продолжительности, но с конвеевской точки зрения, когда он глядит на нашу Вселенную, они бегут все быстрее и быстрее в какой-нибудь небесной системе отсчета времени. Скажем, первый земной день длится столько же, сколько один небесный, но второй земной день — только половина небесного, следующий — одна четверть и так далее. И тогда, через два небесных дня, бац! — бесконечно много земных дней прошли, и мы можем отправляться.

А. Я никогда об этом не думала, но в твоих словах есть рациональное зерно. В каком-то смысле мы теперь в том положении, в котором Конвей был после того, как прошло бесконечно много земных дней. Потому что мы на самом деле знаем все, что случилось до дня $\aleph$.

Б (*жестикулируя*). Вот еще один плюс математики: наши конечные мозги могут объять бесконечное.

А. По крайней мере счетно бесконечное.

Б. Но ведь действительные числа несчетны, а мы можем понять и их тоже.

А. Думаю да, ведь любое действительное число — это просто бесконечная десятичная дробь.

Б. Или двоичная.

А. Ух ты! теперь я знаю, что произошло в день $\aleph$ — были сотворены действительные числа!

Б (*округлив глаза*). О, Господи. Похоже, ты права.

А. Точно, мы получим $\frac{1}{3}$, если в качестве X_L возьмем, скажем, множество

$$\{.01, .0101, .010101, .01010101, \dots\}$$

— это двоичная запись, — а в качестве множества X_R возьмем числа, которые все точнее приближают $\frac{1}{3}$ сверху, например,

$$\{.1, .011, .01011, .0101011, \dots\}.$$

Б. А числа вроде π можно сотворить примерно так же. Мне неизвестна двоичная запись π, это что-то вроде

$$\pi = 11.00100100001111\dots;$$

мы сконструируем множество Π_L, обрывая запись после каждой единицы:

$$\Pi_L = \{11.001, 11.001001, 11.00100100001, \dots\},$$

а Π_R — обрывая запись после каждого нуля с последующим увеличением:

$$\Pi_R = \{11.1, 11.01, 11.0011, 11.00101, \dots\}.$$

А. Есть много других множеств, которые можно взять в качестве Π_L и Π_R, даже бесконечно много. Но каждое из них порождает эквивалентное число, ведь это первое сотворенное число, которое больше Π_L и меньше Π_R.

Б (*снова обнимая ее*). Так вот что означает запись на Камне, в которой сказано, что Вселенная была сотворена в день $\aleph$: Вселенная — это действительные числа.

Ты когда-нибудь слышала про космологическую теорию большого взрыва? Вот что такое этот день $\aleph$ — взрыв!

А (*не слушая*). Билл, а ведь есть еще другое число, сотворенное в день $\aleph$; число, которое не является действительным. Пусть X_R — пустое множество, и пусть

$$X_L = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Тогда получится число, которое больше *всех* остальных!

Б. Бесконечность! Вот она!

А. Обозначу-ка ее греческой буквой ω — она мне давно нравится. И было еще сотворено число $-\omega$ — минус бесконечность.

Б. День $\aleph$ выдался непростым.

А. А потом настал *следующий* день.

Б. Так $\aleph$ — это еще не конец?!

А. Конечно нет, с чего бы Конвею останавливаться? Он едва-едва начал. Процесс не остановить, ведь всегда можно брать пустое множество X_R, а множество X_L составить из всех сотворенных к тому моменту чисел.

Б. Но кроме этого в дни, следующие за $\aleph$, заняться больше особенно *нечем*, ведь все действительные числа располагаются очень плотно. Небесконечная часть Вселенной уже сотворена, между двумя «соседними» действительным числами места совсем не остается — туда ничего не поместить.

А. Нет же, Билл. Я тоже так думала, пока ты это не произнес вслух. Думаю, это показывает, как я люблю спорить с тобой. А что, если взять $X_L = \{0\}$ и $X_R = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$?

Получится число, которое *больше* нуля и *меньше* любого положительного действительного числа! Можем назвать его ε.

Б (*теряя сознание*). Упс... Ничего-ничего, со мной все в порядке. Но для меня все это уже *слишком.* Должен же где-то быть предел.

Больше всего меня поражает, что твое число ε на самом деле было сотворено в день $\aleph$, а *не* позже, ведь ты могла бы взять $X_R = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$. И потом, таких ненормальных чисел много; скажем,

$$\left(\{1\}, \left\{1\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{4}, 1\tfrac{1}{8}, 1\tfrac{1}{16}, \ldots\right\}\right)$$

— это только на волосок больше 1.

И я думаю, есть похожие числа возле каждого действительного числа, и возле π тоже... нет, этого просто не может быть...

А. То, которое чуть больше π, появляется только на следующий за $\aleph$ день. Только числа с конечной двоичной записью получают бесконечно близкого соседа в день $\aleph$.

Б. А на следующий день мы получим число *между* 0 и ε. И ты говоришь, что для Конвея это только цветочки.

А. Самое приятное здесь — что у нас есть не только все действительные числа и бесконечность и все числа-между-ними... у нас есть еще правила, чтобы сравнивать числа — какое из двух больше, — складывать их и вычитать.

Б. Пожалуй, да. Мы доказывали все эти теоремы, полагая, что уже *знаем* все то, что доказываем; это была просто игра, — вывести все старые обычные законы арифметики из правил Конвея. А теперь мы обнаружили, что наши доказательства применимы ко многим случаям, про которые мы и слыхом не слыхивали. Числа ограничены только нашим воображением, наше сознание расширилось...

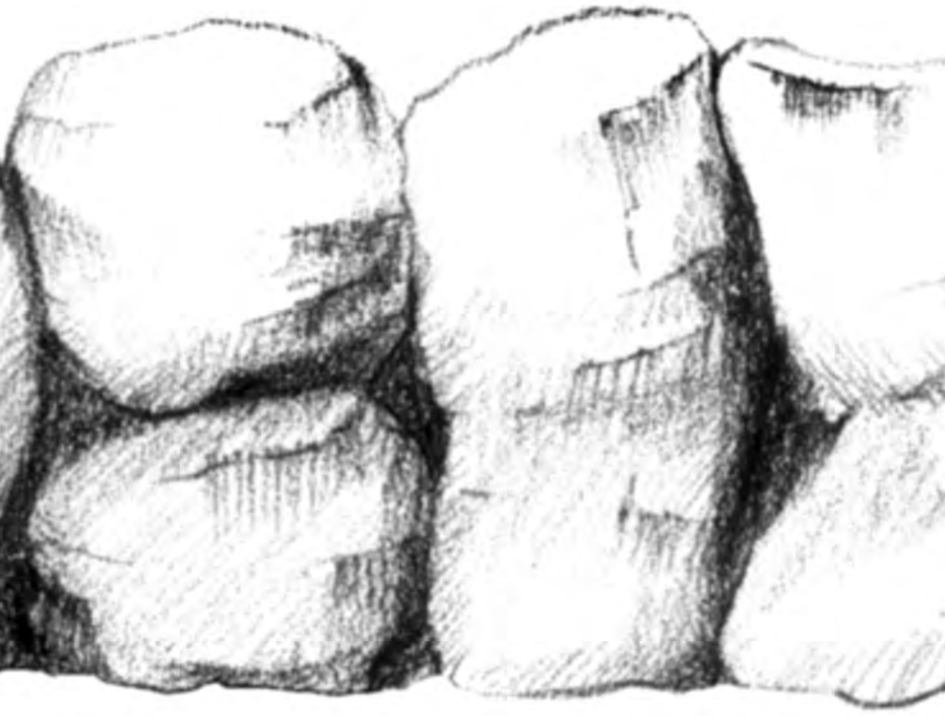
А. Знаешь, для меня это как своеобразный религиозный опыт. Я начинаю больше ценить Господа — ведь Он всюду...

Б. Даже среди действительных чисел.

А. Да ну тебя, я ведь серьезно.

Глава 15

БЕСКОНЕЧНОСТЬ



. . . .

Б. Сегодня я развлекался вычислениями с бесконечностью. Скажем, по правилу (3) сразу получаем, что

$$\omega + 1 = (\{\omega, 2, 3, 4, 5, \dots\}, \varnothing),$$

а после упрощений —

$$\omega + 1 \equiv (\{\omega\}, \varnothing).$$

А. Это число было сотворено на следующий после $\aleph$ день.

Б. Ну да, а на следующий —

$$\omega + 2 \equiv (\{\omega + 1\}, \varnothing).$$

И в тот же день — число

$$\omega + \tfrac{1}{2} \equiv (\{\omega\}, \{\omega + 1\}).$$

А. А как насчет $\omega - 1$?

Б. $\omega - 1$! Я никогда не размышлял над вычитанием из бесконечности, ведь считается, что числа, которые меньше бесконечности, конечны. Давай-ка пропустим его через горнило правил и посмотрим, что из этого выйдет... Смотри:

$$\omega - 1 \equiv (\{1, 2, 3, 4, \dots\}, \{\omega\}).$$

Конечно же, это первое сотворенное число, которое больше всех целых, но меньше ω.

А. Так вот почему на Камне было написано про бесконечные числа, которые меньше бесконечности.

А у меня для тебя есть еще кое-что. Как тебе $\omega + \pi$?

Б. Легко:

$$\omega + \pi \equiv (\omega + \Pi_L, \omega + \Pi_R).$$

Оно было сотворено в день... $2\aleph$! Вместе с $\omega + \varepsilon$ и $\omega - \varepsilon$.

А. Ого! Тогда должно существовать число 2ω. В смысле $\omega+\omega$.

Б. Ну да:

$$\omega + \omega = (\{\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \omega + 4, \dots\}, \varnothing).$$

По-моему, его можно обозначить 2ω; и хотя мы пока не ввели умножения, я совершенно уверен — скоро мы докажем, что $(x + y)z \equiv xz + yz$. Это даст $2z \equiv (1 + 1)z \equiv z + z$.

А. Точно, а число

$$3\omega = (\{2\omega+1, 2\omega+2, 2\omega+3, 2\omega+4, \dots\}, \varnothing)$$

будет сотворено в день $(3\aleph)$, и так далее.

Б. Мы пока еще не разобрались с умножением, но я готов поспорить, что ω умножить на ω окажется числом

$$\omega^2 = (\{\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots\}, \varnothing).$$

А. Сотворенным в день $\aleph^2$. Только представь себе, что Конвей все это долгое время творил еще и маленькие числа.

Б. Знаешь, Алиса, это мне напоминает про соревнования, которые мы устраивали в нашем доме, когда были детьми. Мы выкрикивали числа — кто выкрикнет большее. И скоро один мальчик узнал от своего отца, что самое большое число — это бесконечность. Но я победил его, выкрикнув «бесконечность плюс один». На следующий день мы додумались до бесконечности плюс бесконечность, а скоро добрались до бесконечности, умноженной на бесконечность.

А. А потом?

Б. Ну, мы научились повторять «бесконечностьбесконечность бесконечность» пока хватает дыхания, и после этого соревнование угасло как-то само собой.

А. Но ведь остается еще очень много чисел. Например,

$$\omega^\omega = (\{\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \dots\}, \varnothing).$$

И при этом мы все равно в самом начале пути.

Б. Ты имеешь в виду числа ω^{ω^ω}, $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$, и так далее? Почему они не пришли мне в голову, когда я был мальчишкой?

А. Тут открывается такая перспектива… Но я боюсь, наши доказательства больше не работают, Билл.

Б. Что? Не начинай сначала. Мы их уже подправили. А-а-а, понимаю, о чем ты. О сумме дней.

А. Да. Мы не можем проводить индукцию по числу дней творения, потому что их может быть бесконечно много.

Б. Может быть, не только доказательства, но и сами теоремы не верны в случае бесконечности? Конечно, было бы хорошо, если бы это было не так. Я ощущаю себя властелином, доказывая всякие утверждения о числах, которые нам даже не снились.

А. Пока наши рассуждения о бесконечных числах не вскрыли никаких противоречий. Дай мне немного подумать над этим.

. . . .

Все в порядке. Я думаю, что все в порядке; думаю, нам не нужны суммы дней.

Б. Как ты до этого дошла?

А. Помнишь, как мы впервые подумали об индукции, повстречавшись с «плохими» числами. Нам надо было доказать, что если теорема не выполняется для некоторого x, то она не выполняется и для некоторого элемента x_L множества X_L, а значит, для некоторого элемента x_{LL} множества X_{LL}, и так далее. Но каждая такая последовательность, и это существенно, была конечной — мы непременно должны были добраться до этапа, на котором множество $X_{LL\ldots L}$ было бы пусто, и это означало, что теорема должна была выполняться для исходного числа x.

Б (*присвистывает*). Понимаю. Например, доказывая, что $x + 0 = x$, мы получили $x + 0 = (X_L + 0, X_R + 0)$. По индукции мы полагаем, что $x_L + 0$ равно x_L для всех элементов x_L множества X_L. Если бы это предположение было неверным, то для некоторого элемента $x_{LL} + 0$ не удалось бы доказать, что $x_{LL} + 0$ равно x_{LL}. Или, может быть, какой-нибудь элемент x_{LR} был бы виноват. Любой контрпример приводил бы к бесконечной последовательности контрпримеров.

А. Нам нужно только показать, что не существует бесконечной последовательности чисел-предков

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$$

такой, что x_{i+1} содержится в множестве $X_{iL} \cup X_{iR}$.

Б. Это ты хорошо сказала.

А. И к тому же верно, ведь каждое число (на самом деле, и каждое псевдочисло тоже) создается только из тех, что были *сотворены ранее.* Как только мы создаем новое число x, мы одновременно можем доказать, что не существует бесконечной последовательности предков, начинающейся с $x_1 = x$, потому что мы еще раньше доказали, что не существует бесконечной последовательности предшественников при любом возможном выборе элемента x_2 из множеств X_L или X_R.

Б. В этом есть логика и красота. Но звучит так, словно ты доказываешь существование индукции, пользуясь самой индукцией.

А. Боюсь, ты прав. На самом деле должно существовать что-то вроде аксиомы, формализующей интуитивное понятие «сотворен раньше», которое мы обошли молчанием в правиле (1). Да, так оно и есть; правило (1) будет покоиться на строгом основании, если мы сформулируем его таким образом.

Б. Твои слова относятся только к случаю одной переменной. Мы проводили рассуждения про сумму дней для одной, двух, трех и даже четырех переменных, когда индукция для (x, y, z) основывается на соотношениях для (y, z, x_L) и так далее.

А. Именно. Но в каждом случае индукция сводится к какой-нибудь перестановке переменных, причем хотя бы одна из них получает добавочный индекс L или R. К счастью, это означает, что у нас не может получиться бесконечных цепочек вида

$$(x, y, z) \to (y, z, x_L) \to (z_R, y, x_L) \to \ldots$$

и так далее. Если бы они существовали, хотя бы одна переменная обладала бы своей собственной бесконечной цепочкой предков, а это против правила (1).

Б (*опять обнимая ее*). Алиса, я люблю тебя бесконечно многими способами.

А (*хихикая*). «Как я люблю тебя? Считай [1]»

$$1, \omega, \omega^2, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots$$

Б. Мне все еще кажется, что мы обращаемся с этой бесконечной индукцией способом жульническим и подозрительным. Хотя я не вижу пробелов в твоих рассуждениях, я в них не уверен.

А. Мне кажется, разница здесь между доказательством и вычислениями. В конечном случае, когда мы обсуждали числа, сотворенные до дня $\aleph$, ее по сути не было. А теперь есть явное различие между доказательством и возможностью вычислить. Бесконечных последовательностей-предков нет, но они могут быть сколь угодно длинными, даже если начинаются с одного числа. Например, $\omega, n, n-1, \ldots, 1, 0$ — последовательность предков числа ω при любом n.

Б. Точно. Я как раз думал о последовательностях предков для числа ω^2. Разумеется, они все конечны, но они могут быть такими длинными, что их конечность даже не очевидна.

А. Эта неограниченная конечность означает, что мы можем доказывать, например, что $2 \times \pi = \pi + \pi$, но необязательно можем вычислить $\pi + \pi$ за конечное число шагов. Только Господь может закончить вычисления, зато мы можем закончить доказательства.

Б. Давай посмотрим, $\pi + \pi = (\pi + \Pi_L, \pi + \Pi_R)$, которое... Ну да, здесь есть бесконечно много ветвей вычисления, но все они уводят на конечное расстояние от начальной точки.

[1] В оригинале «How do I love Thee? Let me count the ways» — первая строка сонета английской поэтессы Элизабет Браунинг. — *Прим. перев.*

А. У индукции, которую мы используем, есть одно приятное свойство — нам не нужно доказывать «начальный случай» отдельно. В школе нас учили, что мы всегда должны сначала доказывать P(1) или что-то вроде этого. Обычно мы с этим справлялись.

Б. Знаешь, по-моему я только сейчас осознал настоящий смысл индукции. И я с трудом могу принять факт, что вся наша теория действительно верна, для бесконечных и бесконечно малых чисел, ну и для конечных двоичных.

А. За исключением разве что теоремы (T8), которая говорит о «первом сотворенном числе», обладающем определенным свойством. Думаю, мы можем каждому дню поставить в соответствие какое-нибудь число; например, самое большое число, сотворенное в этот день; и упорядочить все дни...

Б. Кажется, я тебя понимаю. Я заметил, что самое большое число, сотворенное в определенный день — это, по-видимому, то, для которого множество X_R пусто, а множество X_L состоит из всех чисел, сотворенных прежде.

А. Может быть, это объясняет, почему существуют день $\aleph$ и день $(\aleph + 1)$, но не день $(\aleph - 1)$.

Б. Да, пожалуй, но все это слишком глубоко для меня. Я бы предпочел заняться умножением, а ты?

Глава 16

УМНОЖЕНИЕ

А. Дай мне посмотреть, где ты записал правило Конвея для умножения. Должен найтись способ записать его символически. ... Довольно запутанно, но мы уже знаем, что означают слова «части одного вида».

Б. Алиса, это слишком сложно. Давай придумаем собственное правило умножения вместо того, чтобы расшифровывать эту надпись.

Отчего бы не сделать так же, как это было для сложения? Скажем, произведение xy должно лежать между $X_Ly \cup xY_L$ и $X_Ry \cup xY_R$. Это условие должно выполняться по крайней мере, если пока не рассматривать отрицательные числа.

А. Но такое определение будет совпадать с определением сложения, и тогда произведение окажется равно сумме.

Б. Упс, так оно должно быть... Ладно, я готов оценить решение Конвея, давай сюда эти записи.

А. Не огорчайся, у тебя правильный подход. Помнишь, что мы говорили: всегда надо вначале попытаться все сделать самостоятельно.

Б. Пожалуй, этот урок мы усвоили.

А. Самое разумное, что я могу предположить — что Конвей выбирает левое множество произведения xy таким, чтобы в него входили все числа вида

$$x_Ly + xy_L - x_Ly_L \quad \text{или} \quad x_Ry + xy_R - x_Ry_R,$$

а правое множество таким, чтобы в него входили все числа вида

$$x_Ly + xy_R - x_Ly_R \quad \text{или} \quad x_Ry + xy_L - x_Ry_L.$$

Видишь, левое множество получает части «одного вида», а правое — «разных видов». Есть смысл в таком определении?

Б. Ну-ка, ну-ка, выглядит подозрительно. Считается, что xy должно быть больше своей левой части, так что проверяем, выполняется ли условие

$$xy > x_Ly + xy_L - x_Ly_L.$$

Это похоже... да, это эквивалентно неравенству

$$(x - x_L)(y - y_L) > 0.$$

А. Ну и вот! Произведение положительных чисел должно быть положительным! Остальные три условия на xy — располагаться между своим левым и правым множествами — означают по существу, что

$$(x_R - x)(y_R - y) > 0,$$
$$(x - x_L)(y_R - y) > 0,$$
$$(x_R - x)(y - y_L) > 0.$$

Ладно, определение выглядит разумно, хотя пока мы ничего еще не доказали.

Б. Прежде чем углубиться в доказательство основных законов умножения, я хочу проверить несколько простых случаев, просто чтобы быть спокойным. Так...

$$xy = yx; \tag{T20}$$
$$0y = 0; \tag{T21}$$
$$1y = y. \tag{T22}$$

Вроде бы все просто.

А. Хорошо, ноль умножить на бесконечность равно нулю. Вот еще один результат:

$$-(xy) = (-x)y. \tag{T23}$$

Б. Все правильно. А вот забавный случай:

$$\tfrac{1}{2}x \equiv (\tfrac{1}{2}X_L \cup (x - \tfrac{1}{2}X_R), (x - \tfrac{1}{2}X_L) \cup \tfrac{1}{2}X_R). \tag{T24}$$

А. Слушай, мне всегда было интересно, что такое вполовину бесконечный?

Б. Половина бесконечности! Вот и ее очередь:

$$\tfrac{1}{2}\omega \equiv (\{1, 2, 3, 4, \dots\}, \{\omega - 1, \omega - 2, \omega - 3, \omega - 4, \dots\}).$$

Интересно было бы доказать, что $\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega \equiv \omega$. Ого, вот еще один приятный результат:

$$\varepsilon\omega \equiv 1.$$

Наше бесконечно малое число обратно бесконечности!

А. Пока ты тут развлекался, я рассматривала умножение вообще. Для псевдочисел оно кажется жульничеством. Я нашла такое псевдочисло p, для которого $(\{1\}, \varnothing)p$ не похоже на $(\{0, 1\})p$, хотя $(\{1\}, \varnothing)$ и $(\{0, 1\}, \varnothing)$ оба похожи на 2. Несмотря на эту трудность, я применила твой метод панорамного изображения и думаю, что можно доказать теоремы

$$x(y + z) \equiv xy + xz, \tag{T25}$$
$$x(yz) \equiv (xy)z \tag{T26}$$

для произвольных псевдочисел, и еще одну теорему:

$$\text{если } x > x' \text{ и } y > y', \text{ то } (x - x')(y - y') > 0 \tag{T27}$$

для произвольных чисел. Отсюда будет следовать, что xy — число, если x и y — тоже числа.

Б. Теорему (T27) можно использовать, чтобы показать, что

$$\text{если } x \equiv y, \text{ то } xz \equiv yz \tag{T28}$$

для всех чисел. Так что все наши вычисления были вполне строгими.

Думаю, мы охватили все, о чем говорилось на скрижали, за исключением невнятной ссылки на «ряды, отношения и корни».

А. Гмм… А как насчет деления? Спорим, если x лежит между 0 и 1, можно будет доказать, что

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{1}{1+x} &\equiv \\
&\equiv (\{x - x^2, x - x^2 + x^3 - x^4, \ldots\}, \\
&\quad \{x, x - x^2 + x^3, x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5, \ldots\}).
\end{aligned}
$$

По крайней мере, так мы получили $\frac{1}{3}$ при $x = \frac{1}{2}$. Может быть, нам удастся показать, что для каждого ненулевого числа существует обратное, придумав подходящий метод.

Б. Алиса! Смотри, какое пиршество для глаз!

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\omega} &\equiv \left(\{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \left\{\tfrac{\omega}{1}, \tfrac{\omega}{2}, \tfrac{\omega}{3}, \tfrac{\omega}{4}, \ldots\right\}\right); \\
\sqrt{\varepsilon} &\equiv \left(\{\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 4\varepsilon, \ldots\}, \left\{\tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots\right\}\right).
\end{aligned}
$$

А (*падая в его объятия*). Билл! Каждое открытие ведет за собой еще и еще!

Б (*любуясь закатом*). Нам остается еще сделать бесконечно много… за конечное время…

Читатель, возможно, уже догадался, что это выдуманная история. Однако человек по имени Дж. Х. Конвей существует — это профессор Джон Хортон Конвей из Кембриджского университета. Настоящий Конвей открыл много замечательных фактов о своих «экстраординарных» числах, помимо тех, о которых рассказывается в этой книге. Например, каждый многочлен нечетной степени с произвольным числом коэффициентов обязательно имеет корень. А каждое псевдочисло p соответствует позиции в игре для двух игроков — Левого и Правого, — причем четыре соотношения

$$\begin{array}{ll} p > 0, & p < 0, \\ p = 0, & p \parallel 0 \end{array}$$

соответствуют четырем условиям

Левый выигрывает,	Правый выигрывает,
Второй игрок выигрывает,	Первый игрок выигрывает,

если они начинают в позиции p. Вся теория до сих пор находится в младенчестве, и читатель может сам поиграть с неизведанными вопросами: что можно сказать о логарифмах? непрерывности? мультипликативных свойствах псевдочисел? обобщенных диофантовых уравнениях? и так далее.

POSTSCRIPTUM

Перу венгерского математика Альфреда Реньи принадлежат «Диалоги о математике», опубликованные в Сан-Франциско в 1967 году. Первый диалог проходит в Древней Греции, в 440 г. до н. э. устами Сократа дается прекрасное описание природы математики. Второй происходит примерно в 212 г. до н. э., он включает настолько же прекрасное рассуждение Архимеда о приложениях математики. Третий диалог — о математике и естественных науках — доносит до нас из 1600 года голос Галилео.

Я писал книгу «Сюрреальные числа» тоже как математический диалог 1970-х годов, чтобы дать представление о природе творческих поисков в математике. Конечно же, я писал в основном для забавы и надеюсь, что диалог передаст хотя бы частицу удовольствия читателю, однако я должен признать, что писал не без задней мысли, имея в виду и серьезную цель. Именно, мне хотелось предоставить материал, который поможет справиться с одним из серьезнейших пробелов в современной системе образования — недостатком исследовательской работы. Студентам предоставляется довольно мало возможностей на опыте познать, как создается математика, пока они не попадут в аспирантуру.

Я считаю, что творческие способности нельзя развить при помощи учебников, а вот «антиучебник» вроде этой небольшой повести может быть полезным. Поэтому я попытался написать нечто противоположное «Основаниям анализа» Ланду; моя цель — показать, как математику можно «перенести из аудитории в жизнь» и побудить читателя попробовать собственноручно исследовать абстрактные математические идеи.

Наверное, лучше всего можно передать вкус математического исследования, представив подробный о нем отчет. Конвеевский подход к числам поразил меня как превосходное средство для иллюстрации самых важных аспектов математического исследования, потому что это богатая, почти самодостаточная теория, обладающая тесными связями и с алгеброй, и с анализом, и к тому же в ней есть обширные неизученные области.

Другими словами, моя главная цель — вовсе не изучить теорию Конвея, а показать, как может проходить построение такой теории. Поэтому по мере того, как два персонажа этой книги постепенно исследуют и строят систему чисел Конвея, я записывал и их промахи и разочарования, а не только хорошие идеи и триумфальные победы. Мне хотелось дать разумно правдивый портрет важнейших принципов, методов, озарений, страстей и философии математики, так что я писал историю, как если бы сам проводил все исследования (не используя сторонних источников, за исключением смутных воспоминаний об обедах с Конвеем, за которыми мы встречались годом ранее).

Я создал эту книгу в основном для студентов-математиков младших курсов. В рамках обычного учебного плана ее лучше всего использовать либо как (а) дополнительное чтение к курсам «Введение в абстрактную алгебру» и «Математическая логика»; либо как (б) основной текст для семинара, нацеленного на развитие способностей студентов к независимой работе.

Учебные книги обычно снабжают упражнениями. Поэтому, невзирая на риск разрушить чисто «романный» подход, я составил несколько предложений для дополнительных задач. На семинарах такие задачи предпочтительнее давать в начале занятия, для спонтанных обсуждений в группе, а не в качестве домашнего задания.

1. *После главы 3.* Что такое «абстракция», а что такое «обобщение»?
2. *После главы 5.* Предположим, что g — функция, отображающая числа на числа, такая, что из $x \leqslant y$ следует $g(x) \leqslant g(y)$. Положим

$$f(x) = (g(X_L) \cup \{g(x)\}, g(X_R)).$$

   Докажите, что $f(x) \leqslant f(y)$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant y$. Затем для частного случая, когда функция $g(x)$ тождественно равна 0, вычислите значения $f(x)$ для как можно большего количества чисел. [*Замечание.* После главы 12 к этому упражнению можно вернуться, заменив «числа» на «псевдочисла».]
3. *После главы 5.* Пусть x и y — два числа, левые и правые части которых «похожи», но не совпадают. Формально рассмотрим функции

$$f_L : X_L \to Y_L, \quad f_R : X_R \to Y_R,$$
$$g_L : Y_L \to X_L, \quad g_R : Y_R \to X_R$$

   такие, что $f_L(x_L) \equiv x_L$, $f_R(x_R) \equiv x_R$, $g_L(y_L) \equiv y_L$, $g_R(y_R) \equiv y_R$. Докажите, что $x \equiv y$. [Алиса и Билл не сообразили, что эта лемма важна для их рассуждений; они приняли ее без доказательств. Лемма выполняется и для псевдочисел.]
4. *После главы 6.* Можно ли при выводе теории чисел Конвея из нескольких аксиом пользоваться уже «известными» свойствами чисел? (Например, допустимо ли пользоваться индексами, такими как $i - 1$ и $j + 1$?)
5. *После главы 9.* Постройте формальное доказательство общей закономерности после n дней. [Эта задача пред-

ставляет собой интересное упражнение по разработке обозначений. Возможностей здесь много, и студенты должны стремиться ввести такие обозначения, которые облегчили бы понимание строгого доказательства и соответствовали бы интуитивному неформальному доказательству Алисы и Билла.]

6. *После главы 9.* Существует ли простая формула, которая позволяет определить день творения произвольного сотворенного числа по его двоичной записи?
7. *После главы 10.* Докажите, что из $x \equiv y$ следует $-x \equiv -y$.
8. *После главы 12.* Найдите значение $x \oplus y$ для возможно большего количества пар x и y.
9. *После главы 12.* Измените правила (1) и (2), заменив $\not\geqslant$ на $<$ во всех трех местах; добавьте новое правило:

$$x < y \text{ тогда и только тогда, когда } x \leqslant y \text{ и } y \not\leqslant x.$$

А теперь постройте теорию чисел Конвея с самого начала, исходя из этих новых определений. [Этот вопрос требует тщательного повторения материала первых трех глав; в некоторых местах рассуждения придется изменить. Основная трудность — доказать, что $x \leqslant x$ для всех чисел; существует довольно короткое доказательство, которое я предпочитаю здесь не приводить. Хорошо бы студенты открыли, что новое отношение $<$ не совпадает с конвеевским для псевдочисел (хотя совпадает для чисел). В новой ситуации закон $x \leqslant x$ выполняется не всегда; и если, например,

$$x = (\{(\{0\}, \{0\})\}, \varnothing),$$

то в системе Конвея $x \equiv 0$, а в новой — $x \equiv 1$! Определение Конвея приводит к более приятным свойствам, а новое отношение поучительней.]

10. *После главы 13.* Покажите, как другим способом избежать вставшей перед Алисой и Биллом проблемы зацикливания, исключив $\mathrm{III}(z, Z_L, y)$ и $\mathrm{III}(Z_R, z, x)$ из необходимых условий доказательства $\mathrm{II}(x, y, z)$. Иначе говоря, докажите прямо, что соотношение $z + y \leqslant z_L + y$ не может выполняться для всех z_L.
11. *После главы 14.* Определите «непосредственную окрестность» каждого действительного числа в первые несколько дней, следующих за днем $\aleph$.
12. *После главы 15.* Постройте наибольшее бесконечное число, какое вы только можете придумать. Постройте также наименьшее положительное бесконечно малое число.
13. *После главы 15.* Достаточно ли ограничить множества X_L и X_R до счетных? [Это сложный вопрос, но он может привести к интересному обсуждению. Преподавателям следует подготовиться, подзубрив порядковые числа.]
14. *Почти в любом месте.* Каковы свойства операции

$$x \circ y = (X_L \cap Y_L, X_R \cap Y_R)?$$

[Студенты должны обнаружить, что это *не* $\min(x, y)$.] Есть много других интересных операций, например,

$$(X_L \circ Y_L, X_R \cup Y_R)$$

или

$$((X_L \circ y) \cup (x \circ Y_L), X_R \cup Y_R).$$

15. *После главы 16.* Покажите, что если X — множество *всех* чисел, то $(X, \varnothing)$ не эквивалентно *никакому* числу. [Если не предпринимать специальных усилий, в теории множеств возникают парадоксы. Строго говоря, класс всех чисел множеством не является. Сравните эту задачу с парадоксом, в котором говорится о «множестве всех множеств».]

16. *После главы 16.* Назовем x *обобщенным целым числом*, если

$$x \equiv (\{x-1\}, \{x+1\}).$$

Покажите, что множество обобщенных целых замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения. Оно включает обычные целые числа, а также числа вида $\omega \pm n$, $\frac{1}{2}\omega$ и т. д. [Автор упражнения — Саймон Нортон.]

17. *После главы 16.* Назовем x *действительным числом*, если $-n < x < n$ для некоторого (необобщенного) целого n, и если

$$x \equiv (\{x-1, x-\tfrac{1}{2}, x-\tfrac{1}{4}, \ldots\}, \{x+1, x+\tfrac{1}{2}, x+\tfrac{1}{4}, \ldots\}).$$

Докажите, что множество действительных чисел замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения, и что оно изоморфно множеству действительных чисел, определенных традиционным способом. [Автор этого и следующих упражнений — Джон Конвей.]

18. *После главы 16.* Измените правило (1) следующим образом: пара (X_L, Y_R) является числом только тогда, когда $X_L \not\geqslant X_R$ и выполняется следующее условие:

    X_L обладает наибольшим элементом или пусто, только если Y_L обладает наименьшим элементом или пусто.

    Покажите, что в такой ситуации все сотворенные числа — действительные (не более и не менее).

19. *После главы 16.* Найдите псевдочисло p такое, что $p + p \equiv (\{0\}, \{0\})$. [Удивительно, но это сложный вопрос, и он приводит к интересным подзадачам.]

20. *После глав 15 и 16.* Псевдочисло $(\{0\}, \{(\{0\}, \{0\})\})$ больше нуля и меньше любого положительного числа x. Таким образом, оно *действительно* бесконечно мало! Правда,

$(\{0\}, \{(\{0\}, \{-1\})\})$ еще меньше. Кроме того, любое псевдочисло $p > 0$ больше $(\{0\}, \{(\{0\}, \{-x\})\})$ для некоторого достаточно большого числа x.

21. *После главы 16.* Для произвольного x определим число

$$\omega^x = (\{0\} \cup \{n\omega^{x_L} | x_L \in X_L, n = 1, 2, 3, \dots\},$$
$$\left\{\frac{1}{2^n}\omega^{x_R} | x_R \in X_R, n = 1, 2, 3, \dots\right\}\Big).$$

Докажите, что $\omega^x\omega^y = \omega^{x+y}$.

22. *После главы 16.* Изучите свойства симметричных псевдочисел (обозначим их множество через S) таких, что

$$(P_L, P_R) \in S \text{ тогда и только тогда, когда } P_L = P_R \subseteq S.$$

Иначе говоря, левое и правое множества элементов множества S совпадают, то же самое относится к элементам левых и правых множеств, и так далее. Покажите, что множество S замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения. Исследуйте свойства S; например, сколько непохожих элементов S создается каждый день, что интересного в их арифметике? [Эта задача с открытым ответом, возможно, лучше всех в списке, поскольку здесь возникает поразительно богатая теория.]

Я пришлю подсказки к решениям упражнений 9, 19 и 22 любому добросовестному преподавателю, обратившемуся ко мне с письмом на адрес Стэнфордского Университета. Я хочу сделать несколько пожеланий преподавателям, которые будут вести семинар по материалам этой книги. (Другим людям следует немедленно прекратить чтение и закрыть книгу.)

Дорогой Преподаватель! В этой истории кроется много тем для обсуждения на занятиях. Первые главы не займут много времени, но потом одного занятия не будет хватать на разбор материала одной главы. Неплохая идея — всем заранее пролистать книгу, поскольку именно развитая в конце теория делает интересным начало. Нужно постоянно напоминать студентам «отфильтровывать» важные общие принципы, *modus operandi* персонажей. Почему они подходят к проблеме именно так, а не иначе, что хорошего и что плохого в их подходе? Как «мудрость» Алисы отличается от «мудрости» Билла? (Их характеры заметно отличаются.) Еще одно важное правило для студентов — проверять все математические детали, на которые в тексте иногда есть только намек; для читателя это единственный способ по-настоящему понять, о чем идет речь в книге. Было бы хорошо, если бы студенты пытались решать задачи самостоятельно, прежде чем прочитать их решение в книге. Многоточия (.........) часто указывают на то, что персонажи размышляют (или пишут), и читателю следует делать то же самое.

Ведя семинарские занятия так, как здесь описано, я обнаружил, что полезно ограничить число выступлений каждого студента. Это правило не дает болтунам перетягивать одеяло на себя и разрушать дискуссию; участие в ней принимает каждый.

Еще одна рекомендация — закончить курс заданием в трехчетырехнедельный срок написать исследование некоторой темы, явно в этой книге не проработанной. Например, несколько возможных тем указаны в упражнениях с открытым ответом из списка, приведенного выше. Возможно, студенты могут выполнять свои исследования в парах. Студентам следует сообщить, что будет оцениваться не только математическое содержание, но и стиль изложения, скажем, 50 на 50. Они должны понимать, что семестровая работа — это не то же самое, что рядовое домашнее задание, которое обычно представляет собой собрание фактов в форме таблицы — без мотиваций, объяснений и т. п. Семестровая же работа должна быть в форме текста, как принято в учебниках математики. Студенты получат опыт составления математических текстов, если по очереди будут готовить резюме того, что обсуждалось на занятиях. При этом остальные студенты смогут воспользоваться потом этими записками, не отвлекаясь на составление своих собственных конспектов.

По-моему, два важнейших недостатка современного математического образования — недостаток тренировки творческого мышления и недостаток тренировки составления технических текстов. Надеюсь, что эта небольшая книга поможет справиться с обоими этими недочетами.

Д. Кнут
Стэнфорд, Калифорния,
май 1974 г.

Расследование преступления — точная наука, по крайней мере, должно ею быть. И описывать этот вид деятельности надо в строгой, бесстрастной манере. А у вас там сантименты. Это все равно что в рассуждение о пятом постулате Евклида включить пикантную любовную историю. — Шерлок Холмс («Знак четырех», 1888, пер. М. Литвиновой)

Научно-популярное электронное издание

Кнут Дональд

СЮРРЕАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*. Художественный редактор *Н. А. Новак*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*. Корректор *Н. Н. Ектова*
Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Лапко* в пакете $\LaTeX\,2_\varepsilon$

Подписано 27.11.13. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 6,88.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 10-й для операционных систем Windows, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry